الفصل الأول
١-٤ تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا .

المفردات

المتباينة الخطية
linear inequality

منطقة الحل
feasible region

الحد
boundary

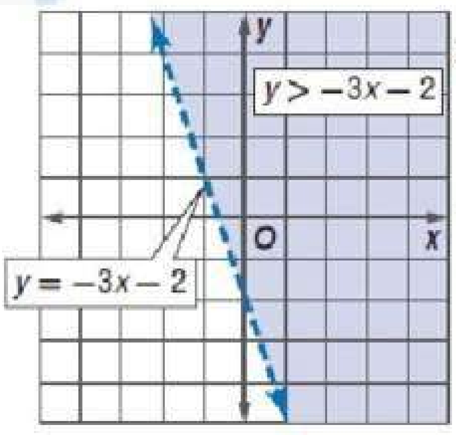
لماذا؟



دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير الطبيعي، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا : تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



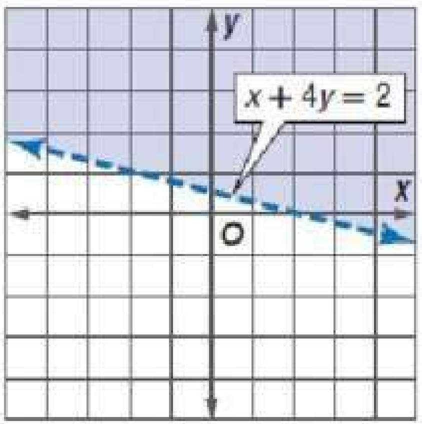
التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظلّلة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًا متصلًا.

الفصل الأول
١-٤ تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

مثال 1 الحد المتقطع

مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًا.

الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعًا.



الخطوة 2: اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على حد المتباينة .

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(0) \overset{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 0)$
✗ $0 > 2$	

ظلّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$.

تحقق: يبين التمثيل البياني أن النقطة $(0, 3)$ تقع في منطقة الحل.

$x + 4y > 2$	المتباينة الأصلية
$0 + 4(3) \overset{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 3)$
✓ $12 > 2$	

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك :-

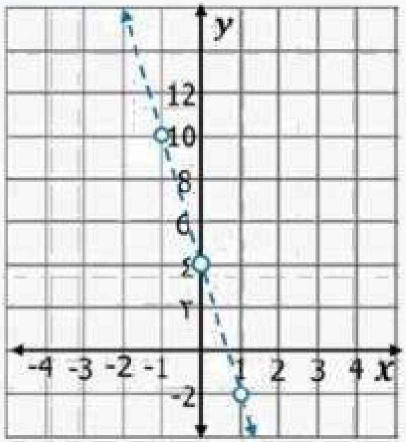
1A) مثل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانياً.

❶ نضع المتباينة في صورة المعادلة.

$$3x + \frac{1}{2}y = 2$$
$$6x + y = 4$$
$$y = 4 - 6x$$

❷ نرسم $y = 4 - 6x$ على المستوى الإحداثي.

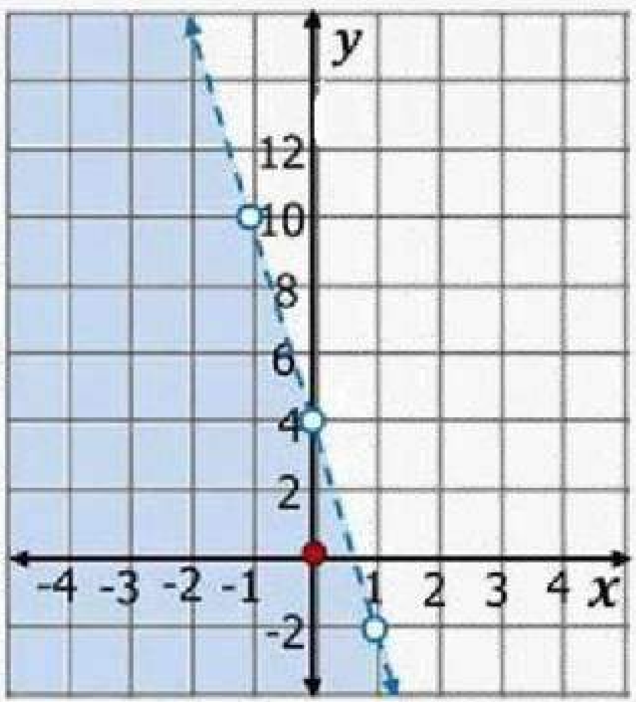
x	-1	0	1
y	10	4	-2



❸ نختار نقط ليست على المستقيم مثل (0,0) ونعوض

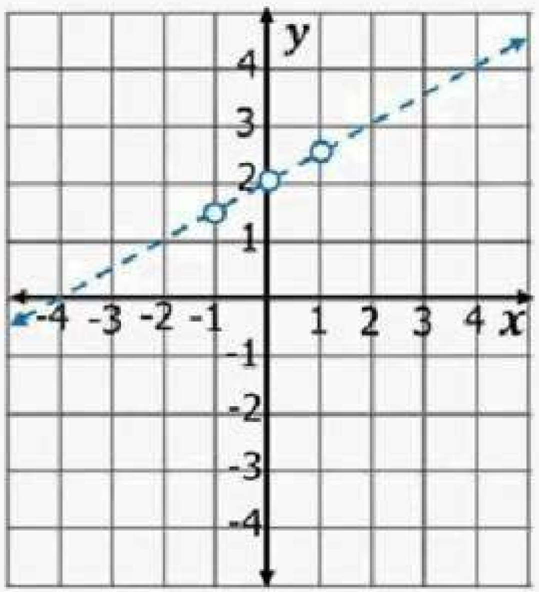
عن $x = 0$ ، $y = 0$ في المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$

فنحصل $0 < 2$ أي أن (0,0) تحقق المتباينة.إذن نصف المستوى (المظلل) الذي يحتوي النقطة (0,0) يمثل حل المتباينة.



تحقق من فهمك :-

1B) مثل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانياً.



❶ نضع المتباينة في صورة المعادلة.

$$-x + 2y = 4$$

❷ نرسم $y = 0.5x + 2$ على المستوى الإحداثي.

x	-1	0	1
y	1.5	2	2.5

❸ نختار نقط ليست على المستقيم مثل (0,0) ونعوض عن $x = 0$ ، $y = 0$ في المتباينة $-x + 2y > 4$ فنحصل $0 > 4$ أي أن (0,0) لا تحقق المتباينة.إذن نصف المستوى (المظلل) الذي **لا يحتوى النقطة** (0,0) يمثل حل المتباينة.

x

الفصل الأول
١-٤ تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا

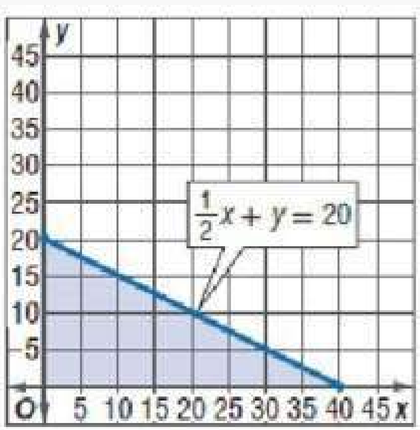
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

مثال 2 من واقع الحياة — الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية، الأول: دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني: دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعيًا.

a) اكتب متباينة تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية التي يمكن تقديمها أسبوعيًا، ثم مثّلها بيانيًا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة ($\frac{1}{2}$ ساعة)، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة (ساعة واحدة). وبما أن مجموع زمن الدروس لا يزيد على 20 ساعة أسبوعيًا، فهذا يعني إمكانية أن يساوي 20 ساعة. ولهذا فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\le$، ولذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. إذن المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \le 20$.



الخطوة 1: مثّل الحد وهو المستقيم $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًا.

الخطوة 2: اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

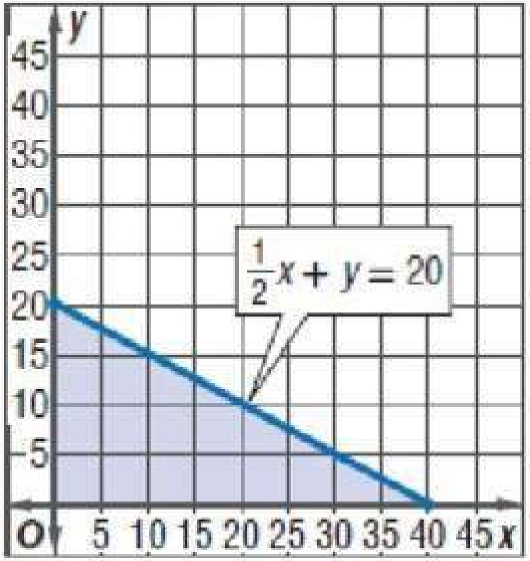
$\frac{1}{2}x + y \le 20$ المتباينة الأصلية

$\frac{1}{2}(0) + (0) \overset{?}{\le} 20$ $(x, y) = (0, 0)$

$0 \le 20$ ✓

ظلّل المنطقة في الربع الأول فقط التي تحوي $(0, 0)$؛ وذلك لأن كلا المتغيرين لا يمكن أن يكون سالبًا.

Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

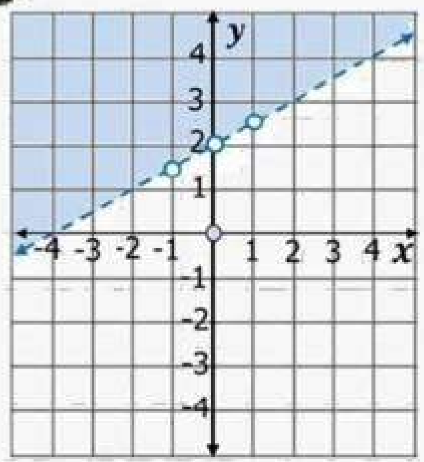


b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوع ما؟ فسّر إجابتك.

النقطة (25, 15) تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوع ما.

تحقق من فهمك :-

2) مع صالح 60 ريالاً يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبة عادية 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثلها بيانياً.

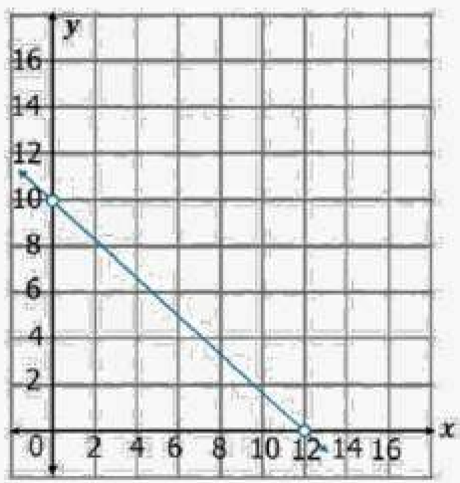


$$5x + 6y \leq 60$$

❶ نضع المتباينة في صورة المعادلة. $5x + 6y = 60$.

❷ نرسم $y = -\frac{5}{6}x + 10$ على المستوى الإحداثي.

x	0	12
y	10	0



❸ نختار نقط ليست على المستقيم مثل (0,0) ونعوض عن $x = 0$ ، $y = 0$ في المتباينة $5x + 6y \leq 60$ فنحصل $0 \leq 60$ أي أن (0,0) تحقق المتباينة. إذن نصف المستوى (المظلل) الذي يحتوي النقطة (0,0) يمثل حل المتباينة.

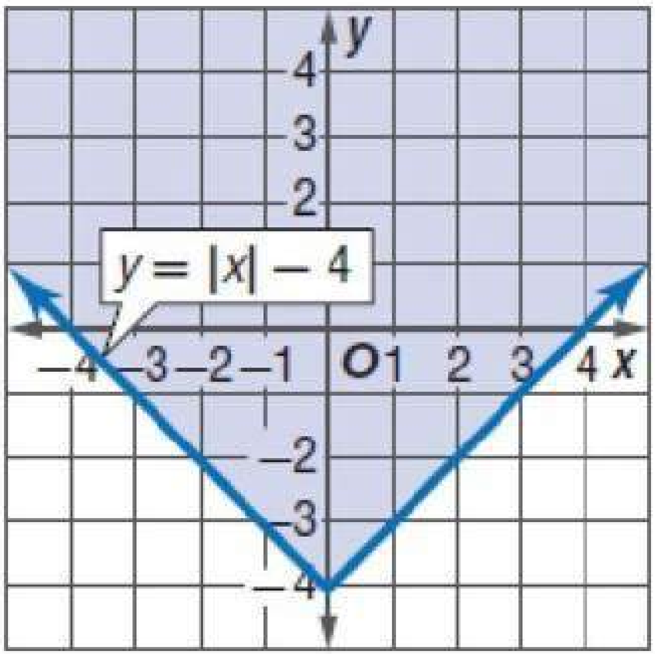
✓

مثال 3 تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًّا.

مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$،

وبما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.



والآن اختبر النقطة $(0, 0)$.

$y \geq |x| - 4$ المتباينة الأصلية

$0 \overset{?}{\geq} |0| - 4$ $(x, y) = (0, 0)$

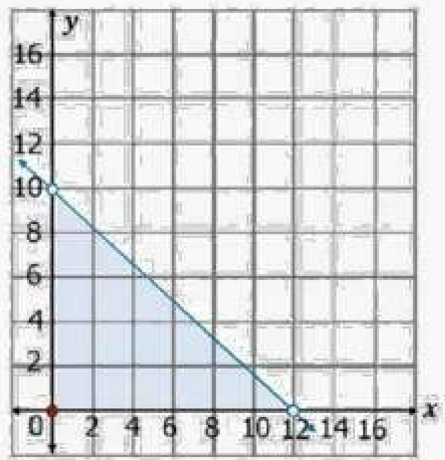
$0 \geq -4$ ✓

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.



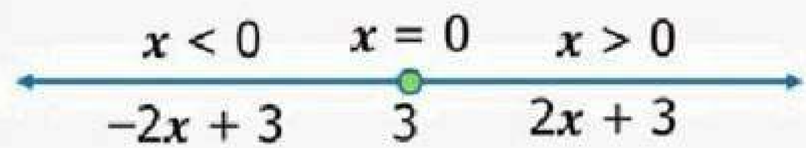
تحقق من فهمك :-

3A) مثّل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانياً.



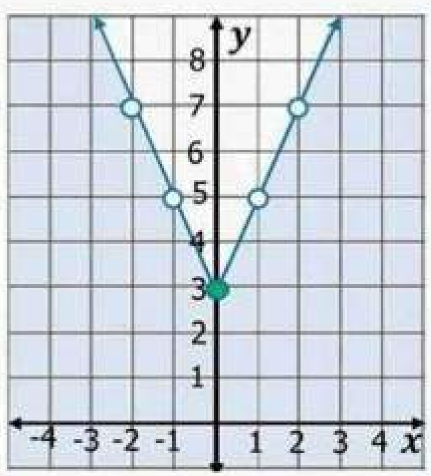
❶ نضع المتباينة في صورة المعادلة $y = 2|x| + 3$

❷ نرسم $y = 2|x| + 3$ على المستوى الإحداثي.



1	2	3	x
5	7	9	$2x + 3$

-3	-2	-1	x
9	7	5	$-2x + 3$

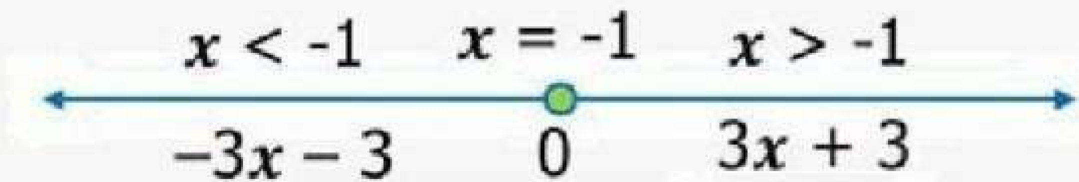


❸ نختار نقط ليست على المستقيم مثل (0,0) ونعوض عن $x = 0$ ، $y = 0$ في المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ فنحصل $0 \leq 3$ أي أن (0,0) تحقق المتباينة.إذن المستوى (المظلل) الذي يحتوي النقطة (0,0) يمثل حل المتباينة.

✓

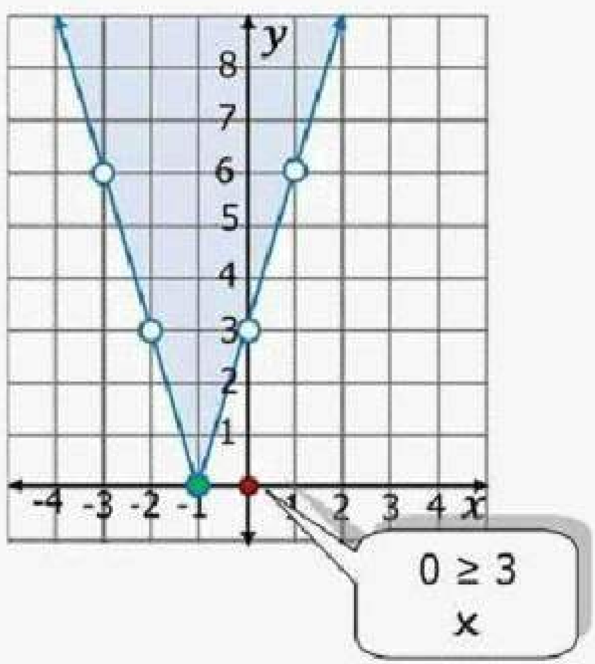
تحقق من فهمك :ـ

3B) مثّل المتباينة $y \geq 3\,|x + 1|$ بيانياً.



0	1	2	x
3	6	9	$3x + 3$

-4	-3	-2	x
9	6	3	$-3x - 3$



تـــأكـد :–

مثال 1

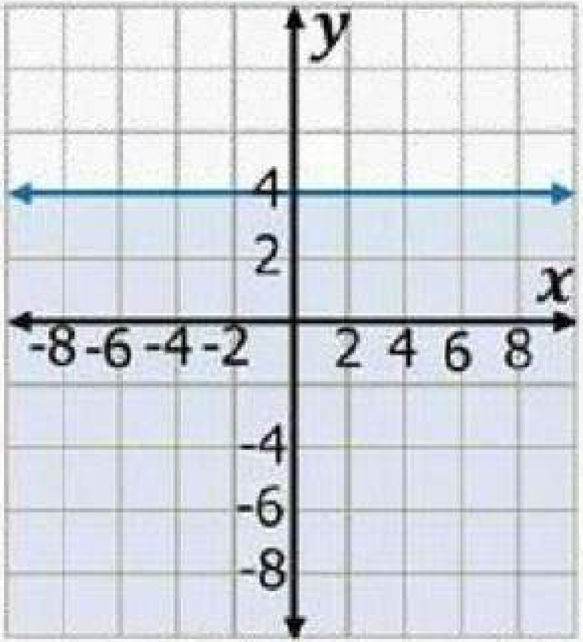
مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

1) $y \leq 4$

نرسم **y=4** على المستوى الاحداثي

x	-1	0	1
y	4	4	4

نعوض بالنقطة (0,0) في المتباينة



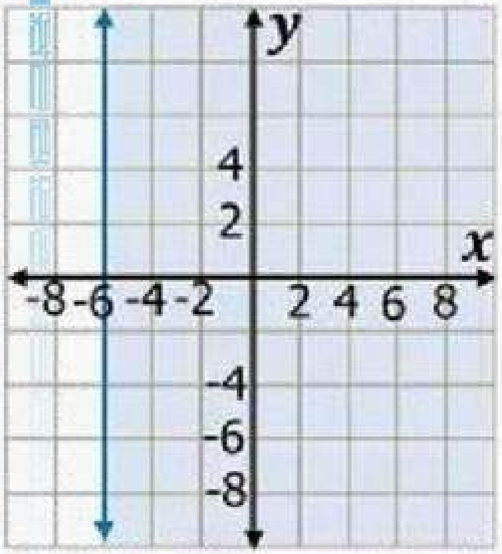
نجد أن $0 \leq 4$ صحيح فيكون التظليل في الجهة التي بها النقطة (0,0)

تـــأكـد :-

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

2) $x \geq -6$



نرسم y=-6 على المستوى الاحداثي

نعوض بالنقطة (0,0) في المتباينة

نجد أن 0≥-6 صحيح فيكون التظليل في الجهة التي بها النقطة (0,0)



تـــأكـد :-

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

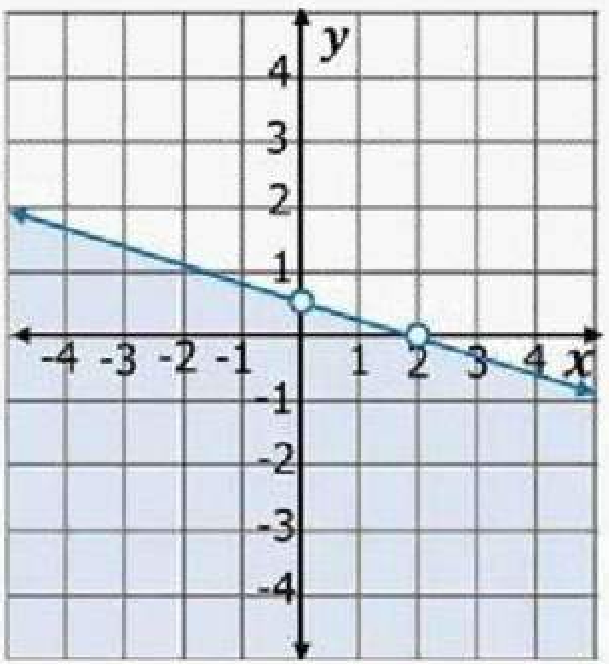
3) $x + 4y \le 2$

x	0	2
y	0.5	0

نرسم $x+4y=2$ على المستوى الاحداثي

نعوض بالنقطة (0 ,0) في المتباينة

نجد أن $0 \le 2$ صحيح فيكون التظليل في الجهة التي بها النقطة (0 ,0)



تـــأكـد :-

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

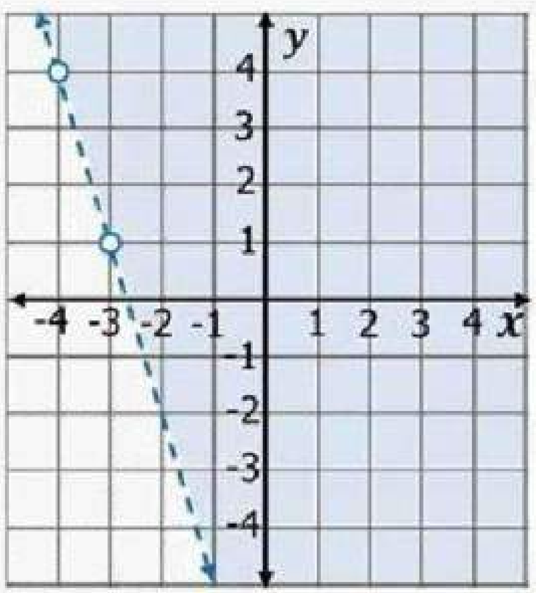
4) $3x + y > -8$

نرسم $3x+y=-8$ على المستوى الاحداثي

x	-4	-3
y	4	1

نعوض بالنقطة (0،0) في المتباينة

نجد أن $3(0)+0 > -8$ صحيح فيكون التظليل في الجهة التي بها النقطة (0،0)



مثال 2

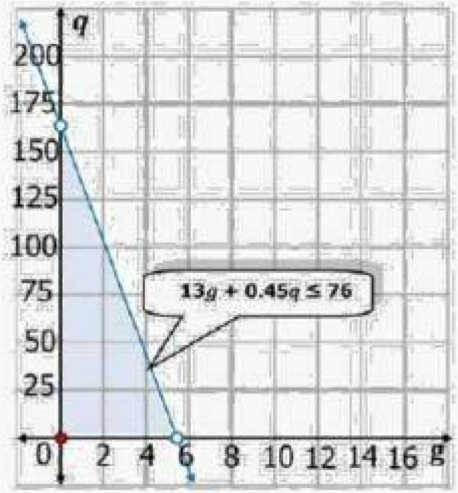
5) مع عامر 76 ريالاً، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 0.45 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 13 ريالاً.

***a*)** اكتب متباينة تمثل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود $\mathbf{g}$ عدد عبوات زيت المحرك، التي يمكنه شراؤها.

$$13\,\mathbf{g} + 0.45\,q \le 76$$

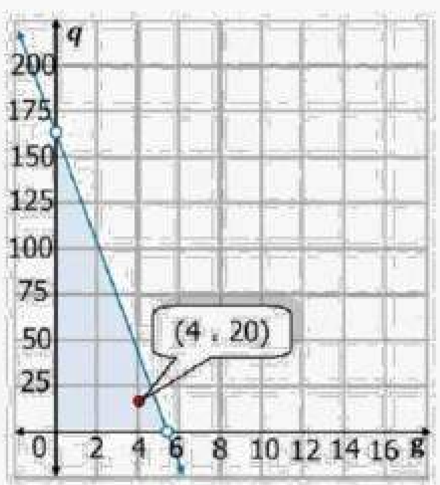
***b*)** مثل المتباينة بيانياً.

g	0	5.8
q	169	0



***c*)** هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ20 لتراً من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك ؟ فسر إجابتك.

نعم؛ لأن النقطة (20 ، 4) تقع في المنطقة المظللة

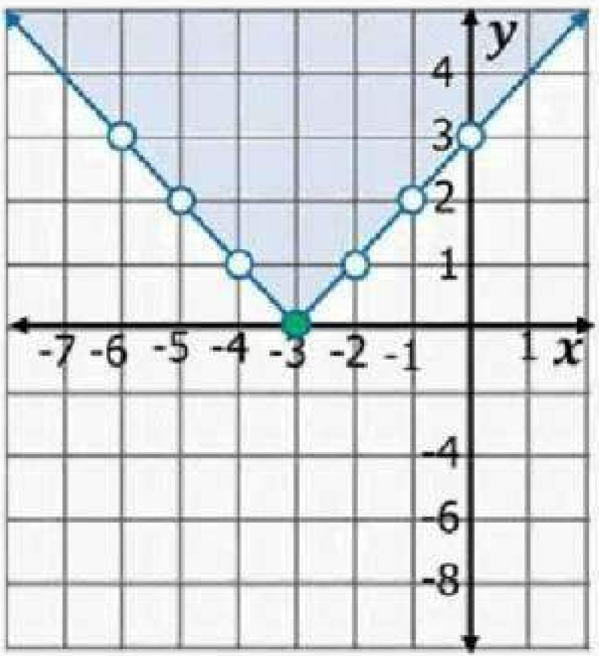


مثال 3

مثل المتباينتين الآتيتين بيانياً.

6) $y \geq |x + 3|$

$x < -3$	$x = -3$	$x > -3$
$-x - 3$	0	$x + 3$



-2	-1	0	x
1	2	3	$x + 3$

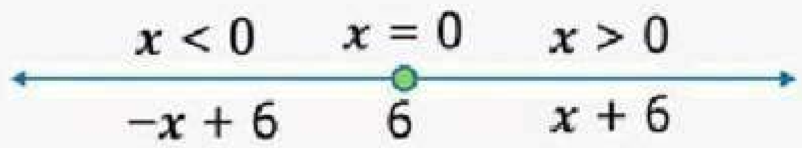
-6	-5	-4	x
3	2	1	$-x - 3$

مثال 3

مثل المتباينتين الآتيتين بيانياً.

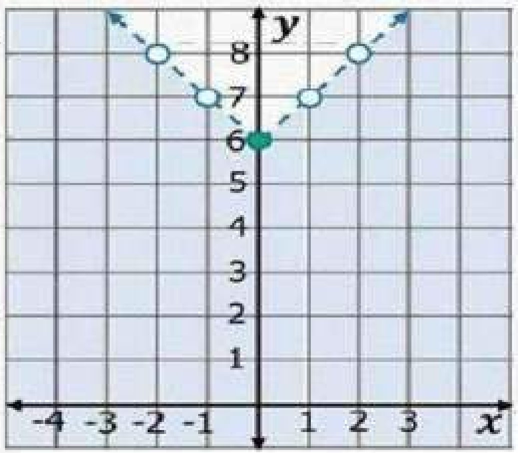
7) $y - 6 < |x|$

$$y = |x| + 6$$



x	-1	-2	-3
$-x+6$	7	8	9

x	3	2	1
$x+6$	9	8	7

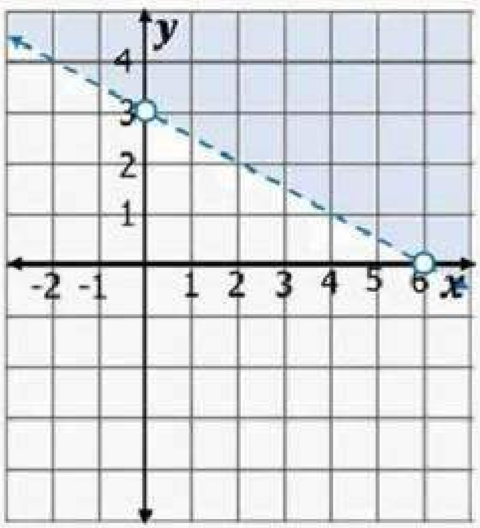


تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

8) $x + 2y > 6$



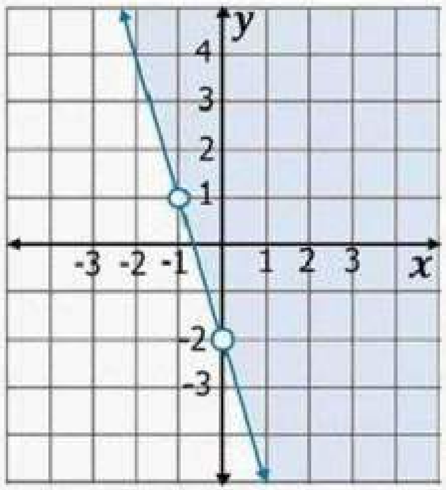
x	0	6
y	3	0

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

9) $y \geq -3x - 2$



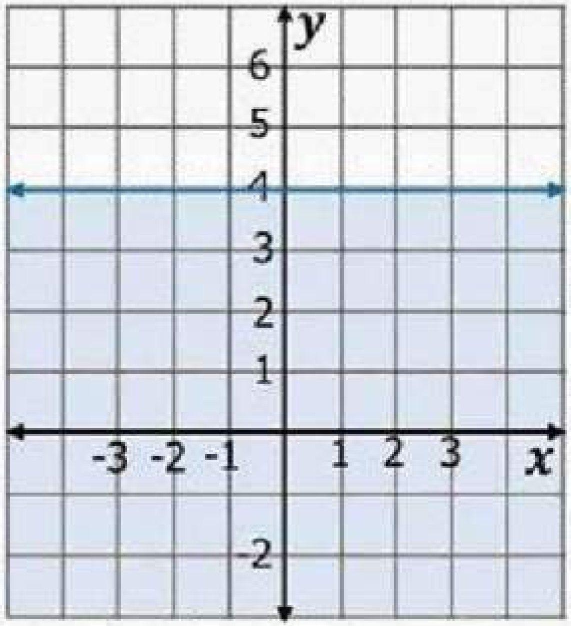
x	-1	0	1
y	1	-2	-5

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

10) $2y + 3 \le 11$



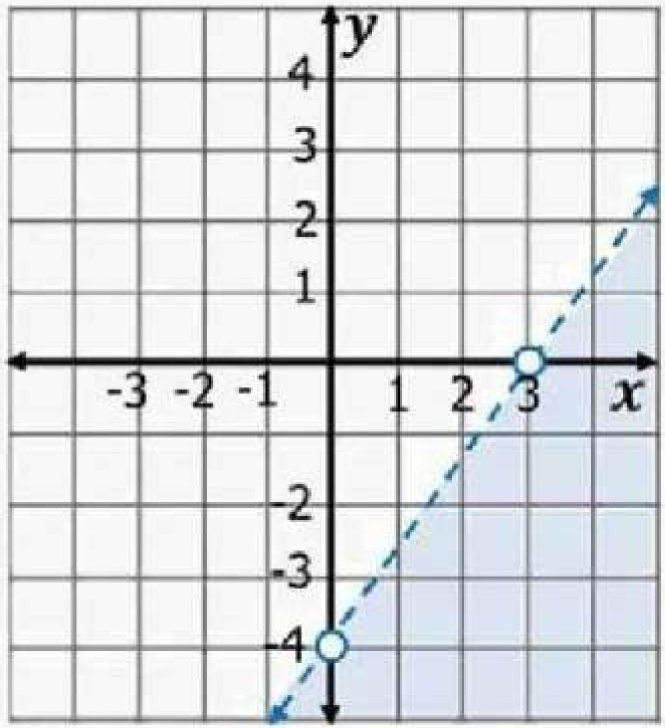
$$2y + 3 \le 11$$
$$2y \le 11 - 3$$
$$2y \le 8$$
$$y \le 4$$

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

11) $4x - 3y > 12$



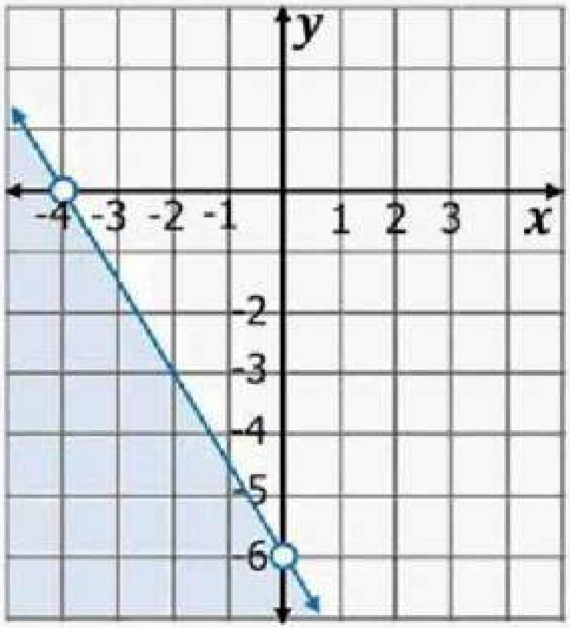
x	0	3
y	- 4	0

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

12) $6x + 4y \leq -24$



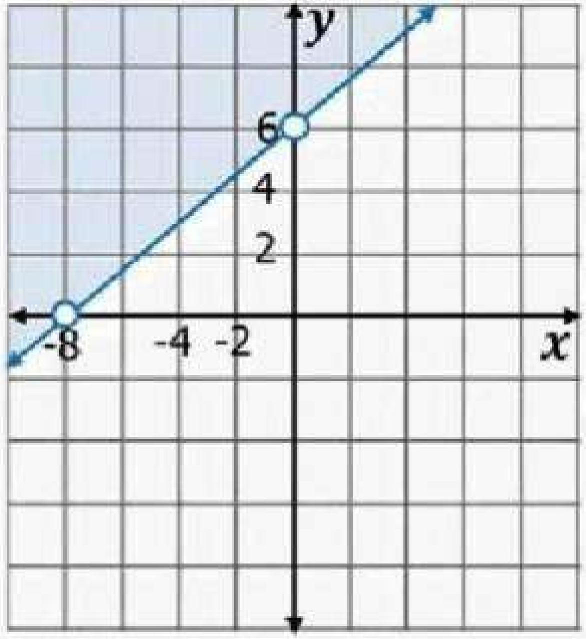
x	0	-4
y	-6	0

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$



x	0	-8
y	6	0

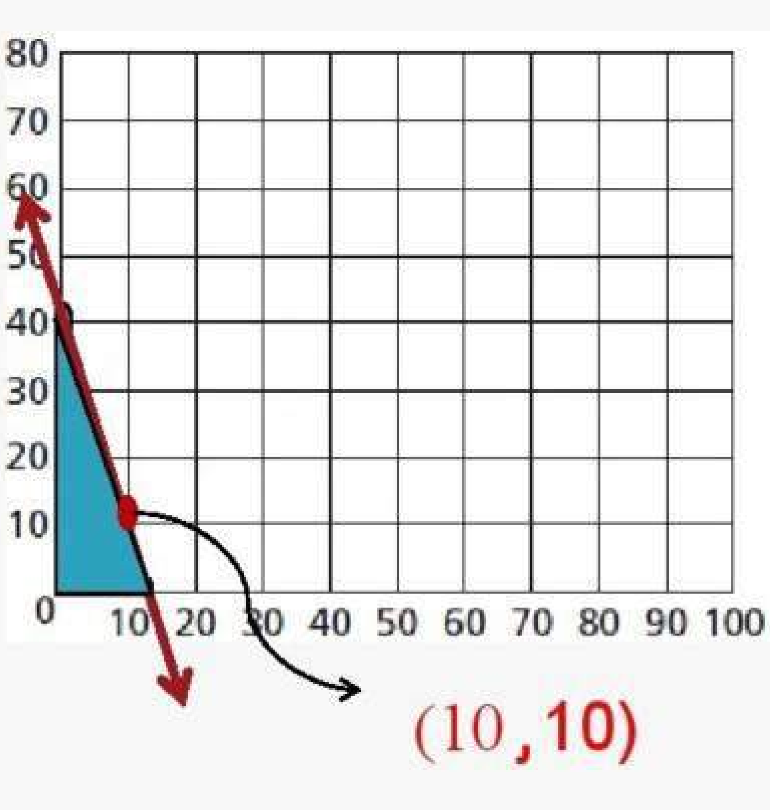
تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 2

14) **مشتريات:** مع سعاد 200 ريالٍ. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق. وعددًا من الكؤوس؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية، فإذا كان سعر الطبق 15 ريالًا وسعر الكأس 5 ريالات، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس، ثم مثّلها بيانيًا.

b) هل تستطيع سعاد شراء 10 أطباق وَ 10 كؤوس؟



a) $15x + 5y \le 200$

x	0	13⅓
y	40	0

(b)

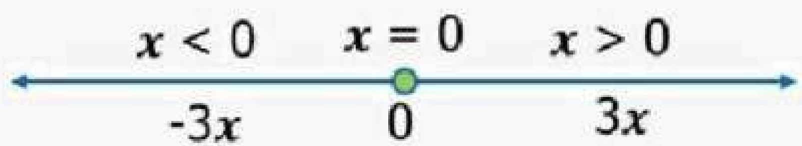
(10 ,10) تقع في منطقة الحل نعم تستطيع

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

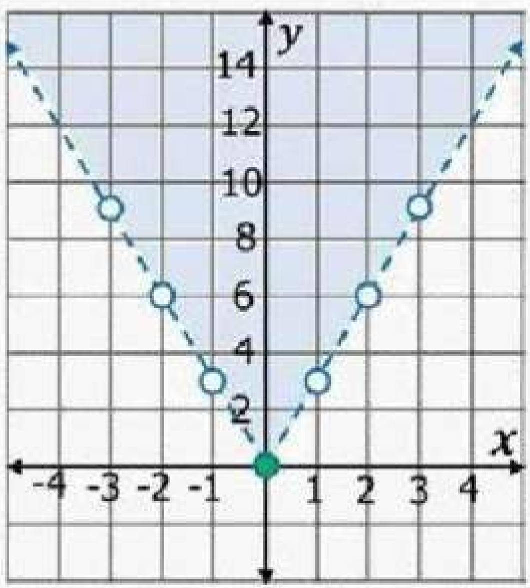
مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

15) $y > |3x|$



1	2	3	x
3	6	9	$3x$

-3	-2	-1	x
9	6	3	$-3x$



تـدرب وحـل المسائل :ــ

مثـال 3

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

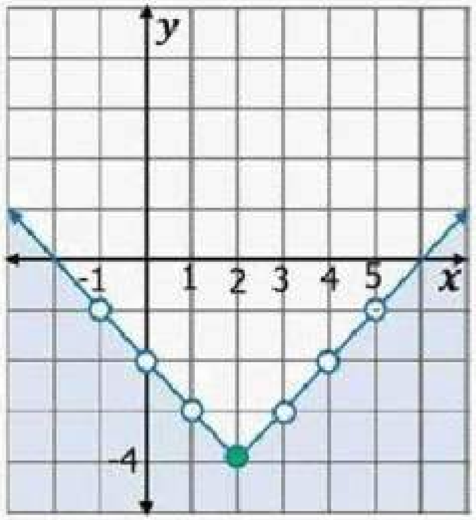
16) $y + 4 \le |x - 2|$

$$y \le |x - 2| - 4$$

$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$-x - 2$	-4	$x - 6$

-1	0	1	x
-1	-2	-3	$-x - 2$

3	4	5	x
-3	-2	-1	$x - 6$



تدرب وحل المسائل :–

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

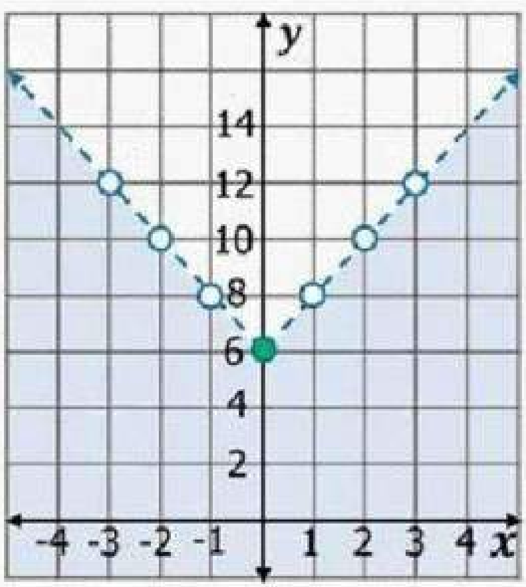
17) $y - 6 < |-٢x|$

$$y < |-2x| + 6$$

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$-2x + 6$	6	$2x + 6$

-3	-2	-1	x
12	10	8	$-2x + 6$

1	2	3	x
8	10	12	$2x + 6$



تدرب وحل المسائل :–

مثال 1

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

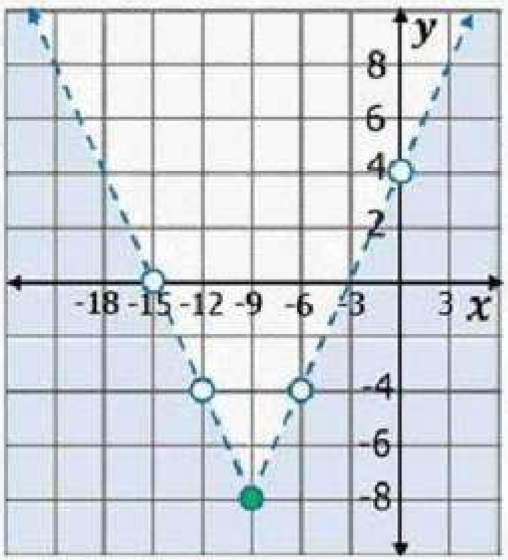
18) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$

$$y < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right| - 8$$

$x < -9$	$x = -9$	$x > -9$
$-\frac{4}{3}x - 20$	-8	$\frac{4}{3}x + 4$

-15	-12	x
0	-4	$-\frac{4}{3}x - 20$

-6	0	x
-4	4	$\frac{4}{3}x + 4$



تـدرب وحـل المسـائل :ـ

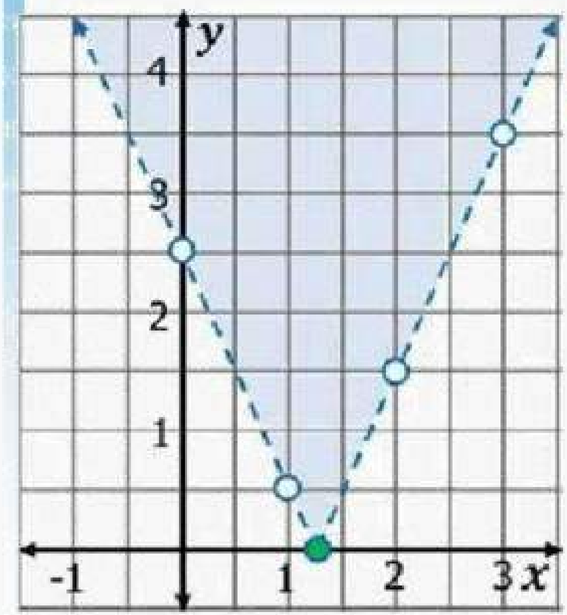
مثال 3

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

19) $2y > |4x - 5|$

$$y > 0.5\,|4x - 5|$$

$x < 1.25$	$x = 1.25$	$x > 1.25$
$-2x + 2.5$	0	$2x - 2.5$



0	1	x
2.5	0.5	$-2x + 2.5$

2	3	x
1.5	3.5	$2x - 2.5$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 3

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

20) $-y \leq |3x - 4|$

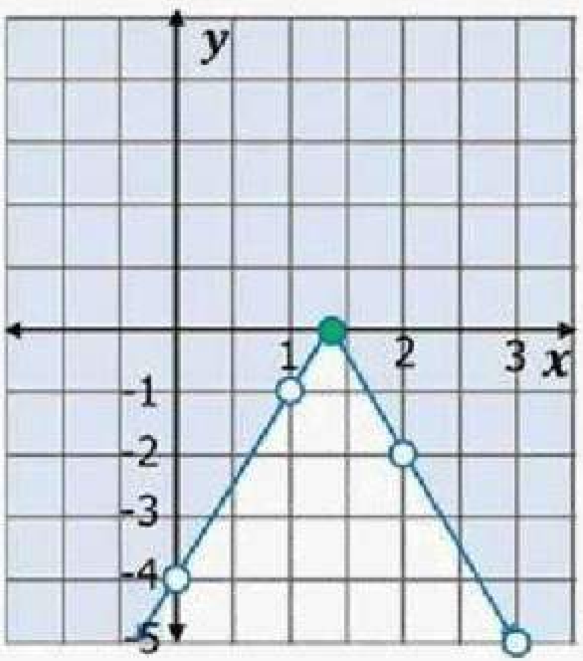
$y \leq -|3x - 4|$

$x < \frac{4}{3}$ | $x = \frac{4}{3}$ | $x > \frac{4}{3}$

$3x - 4$ | 0 | $-3x + 4$

0	1	x
-4	-1	$3x - 4$

2	3	x
-2	-5	$-3x + 4$





21) يعمل سعيد عملين ليحقق دخلاً أسبوعياً لا يقل عن 1500 ريال فإذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة عمل موضحاً في الجدول المجاور.

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري/صباحًا	20 ريالاً
سائق خاص/ مساءً	25 ريالاً

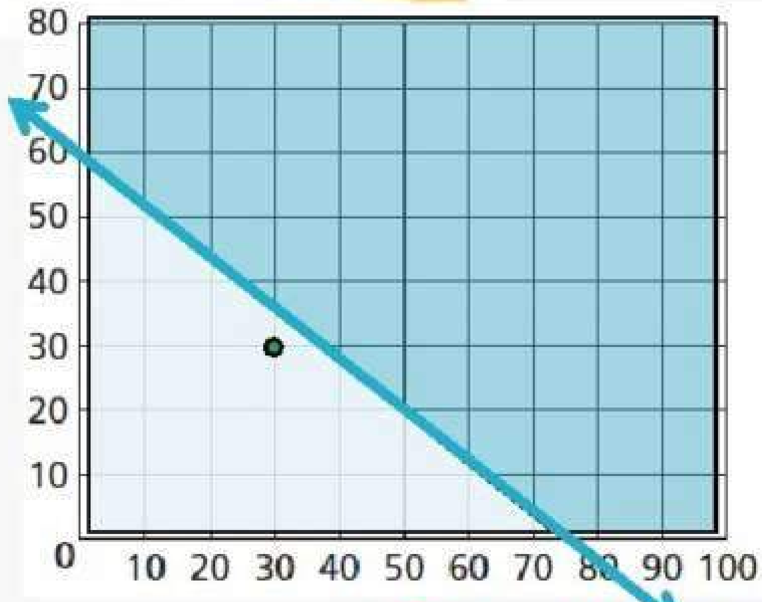
a) اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

$$20a + 25b \geq 1500$$

حيث *a* عدد الساعات التي يعملها كبائع ، *b* عدد الساعات التي يعملها كسائق.

b) مثل المتباينة بيانياً.

a	0	75
b	60	0



c) هل سيحصل سعد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعياً في كل عمل؟

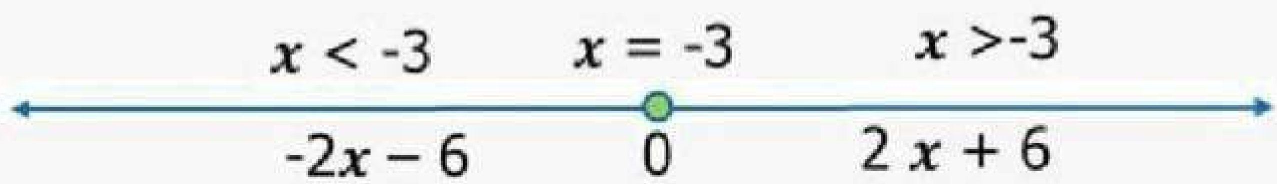
لا لأن النقطة (30,30) تقع خارج الجزء المظلل

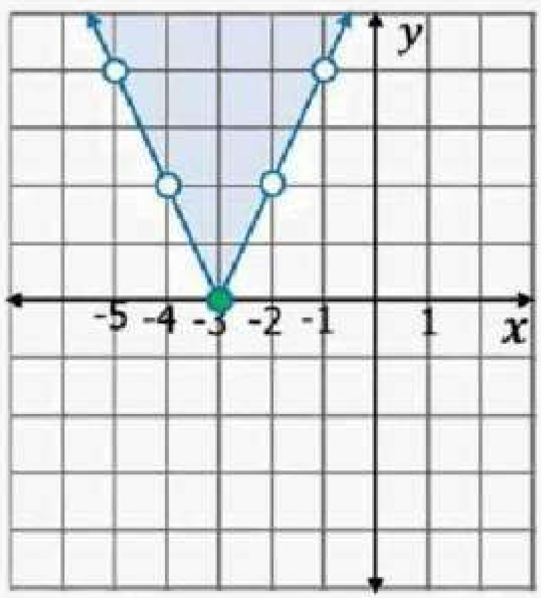
تـدرب وحـل المسائل :-

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً :

22) $y \geq |-2x - 6|$

$y \geq |-2x - 6|$





-5	-4	x
4	2	$-2x - 6$

-2	-1	x
2	4	$2x + 6$

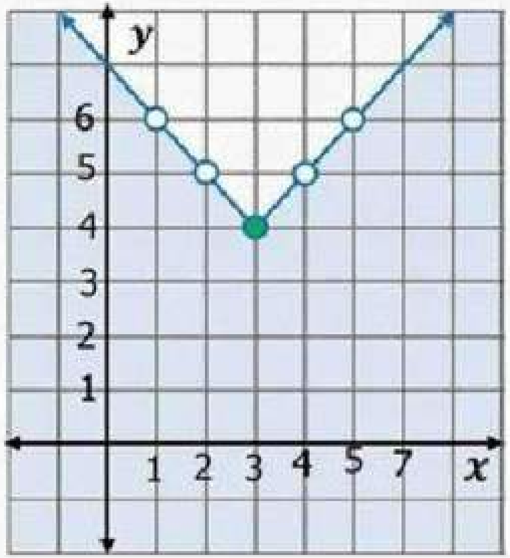
تـدرب وحـل المسائل :-

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً :

23) $y \le | x - 3 | + 4$

$$y \le | x - 3 | + 4$$

$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$-x + 7$	4	$x + 1$



1	2	x
6	5	$-x + 7$

4	5	x
5	6	$x + 1$

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً :

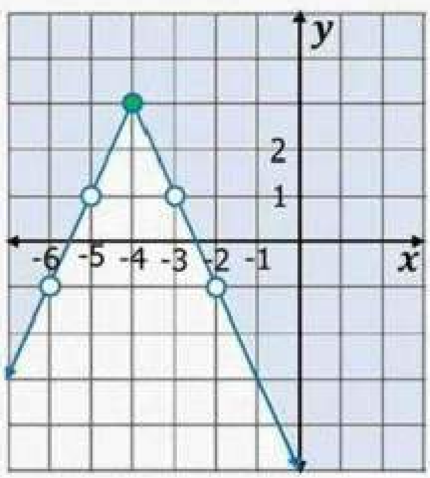
24) $y - 3 > -2\,|x + 4|$

$y \le -2|x + 4| + 3$

$x < -4$	$x = -4$	$x > -4$
$2x + 11$	3	$-2x - 5$

-6	-5	x
-1	1	$2x + 11$

-3	-2	x
1	-1	$-2x - 5$



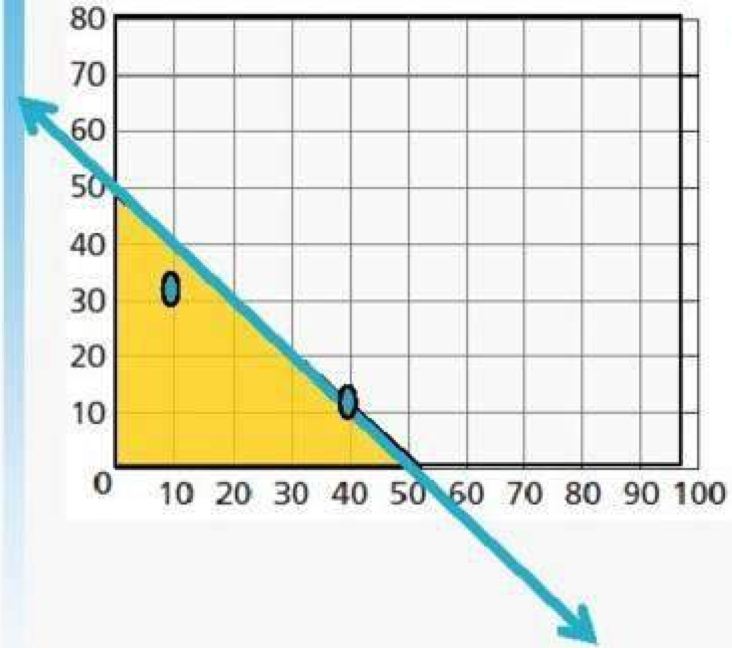
تـدرب وحـل المسائل :-

25) **زينة :** تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء

b) مثّل المتباينة بيانيًا.

c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.



a) $x + y \leq 50$

b)

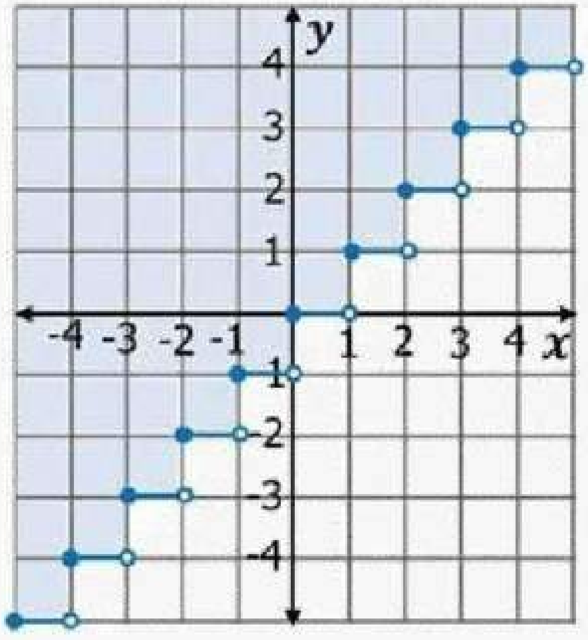
a	0	50
b	50	0

c) (40 ، 10) ، (20 ، 30) ، (10 ، 30)

تدرب وحل المسائل :-

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً :

26) $y \geq [\![x]\!]$

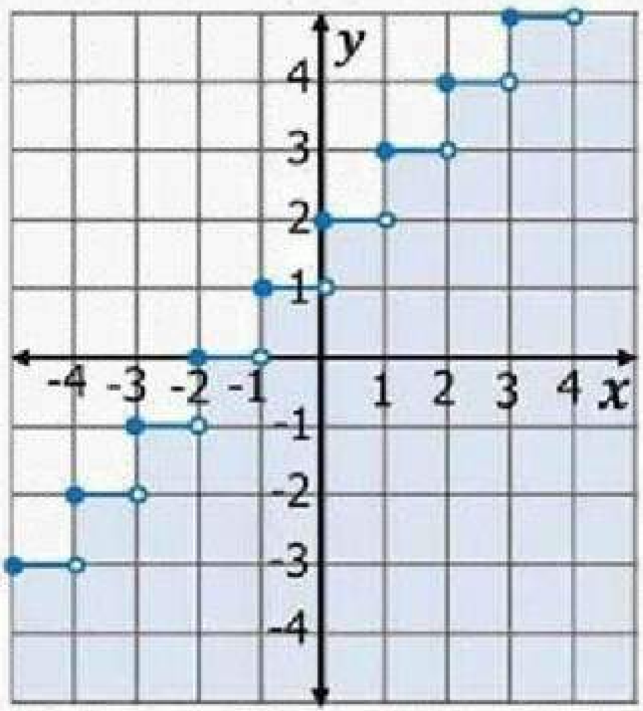


الفهرس

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً :

27) $y < [\![x + 2]\!]$



الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

28) **زينه:** تصنع ميساء عقوداً وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء.

$$x + y \leq 50$$

b) مثل المتباينة بيانياً.

x	0	50
y	50	0



c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

0 إسوارة و 50 عقداً ، 25 سواراً و 25 عقداً ،
أو 30 سواراً و 20 عقداً.

تـدرب وحـل المسائل :–

29) مع سعاد 200 ريال. وتريد أن تشتري عدداً من الأطباق d . وعدداً من الأكواب c؛ لتجهيز لمناسبة اجتماعية فإذا كان سعر الطبق 15ريالاً وسعر الكوب 5 ريالات ،

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس.

$$15\,d + 5\,c \leq 200$$

b) مثل المتباينة بيانياً.



d	0	90
c	40	13.3

c) أعط ثلاثة حلول للمتباينة.

10 أطباق و 10 كؤوس أو 8 أطباق و 8 كؤوس أو 7 أطباق و 7 كؤوس.

الفصل الأول

٥-١ حـل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

فيما سبق:

درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدِّد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

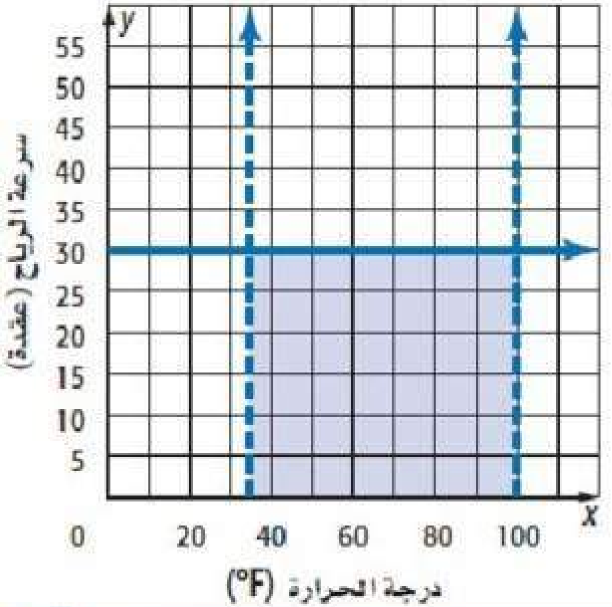
المفردات:

نظام المتباينات الخطية
system of linear inequalities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حل أنظمة المتباينات الخطية

الخطوة 1 مثِّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

الخطوة 2 حدِّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

الفصل الأول

١-٥ حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

إرشادات للدراسة

حد المتباينة

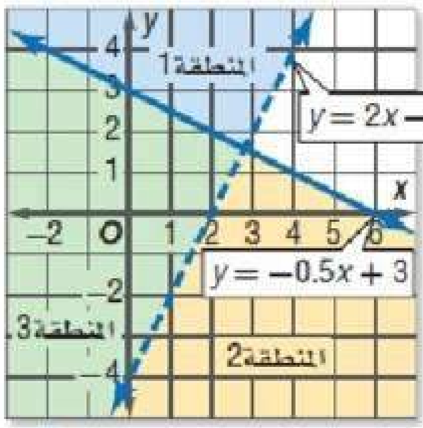
إذا احتوت المتباينة على رمز > أو <، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثل بخط متقطع.

مثال 1 مناطق الحل المتقاطعة

حل النظام الآتي بيانيًا:

$y > 2x - 4$

$y \leq -0.5x + 3$



بتمثيل المتباينتين بيانيًا نجد أن: حلّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتان: 3 , 1

حلّ المتباينة $y \leq -0.5x + 3$ ← المنطقتان: 3 , 2

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0 ,0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

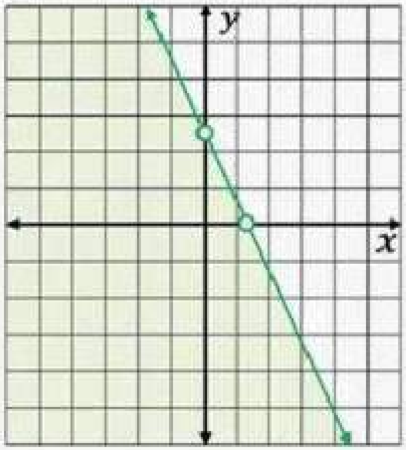
$y > 2x - 4$	$y \leq -0.5x + 3$
$0 \overset{?}{>} 2(0) - 4$	$0 \overset{?}{\leq} -0.5(0) + 3$
$0 \overset{?}{>} 0 - 4$	$0 \overset{?}{\leq} 0 + 3$
$0 > -4$ ✓	$0 \leq 3$ ✓

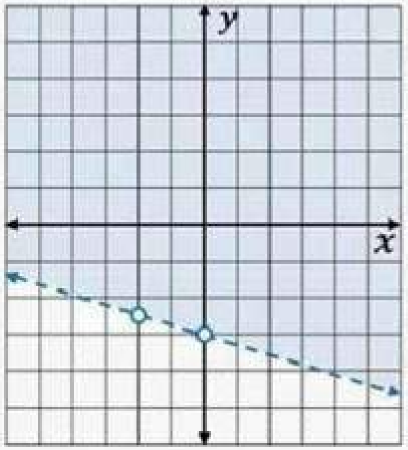
الفصل الأول
٥-١ حـل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

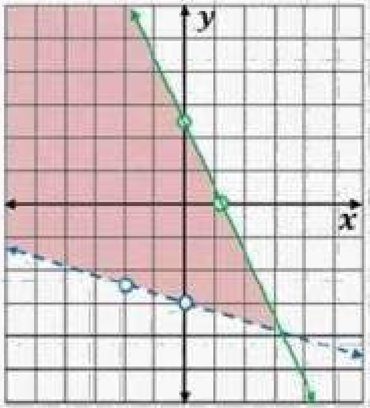
تحقق من فهمك :-

1A) حل النظام الآتي بيانياً: $y \leq -2x + 5$
$y > -0.25x - 6$

الخطوة 1: مثل كل متباينة في النظام بيانياً، وظلل منطقة الحل.







الخطوة 2: حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل **منطقة حل النظام.**

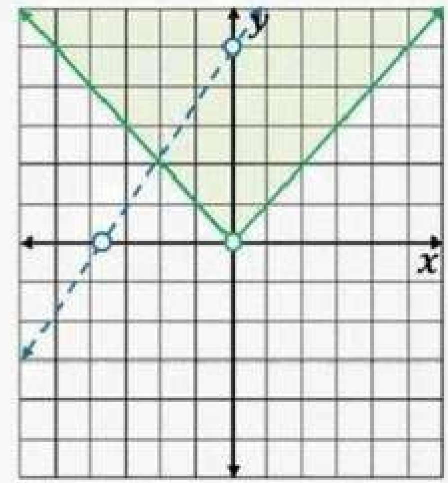
تحقق من فهمك :ــ

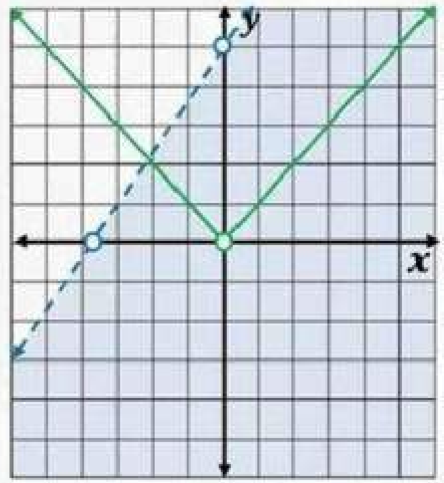
1B) حل النظام الآتي بيانياً:

$y \geq |x|$

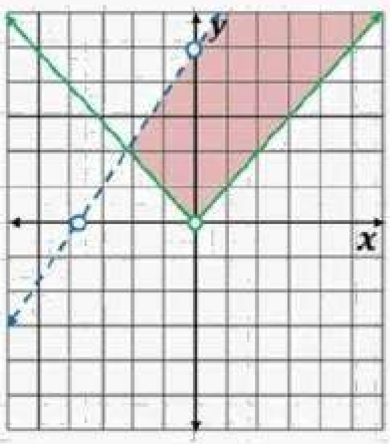
$y < \frac{4}{3}x + 5$

الخطوة 1: مثل كل متباينة في النظام بيانياً، وظلل منطقة الحل.





الخطوة 2: حدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل **منطقة حل النظام**.



الفصل الأول
١-٥ حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً
Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

قراءة الرياضيات

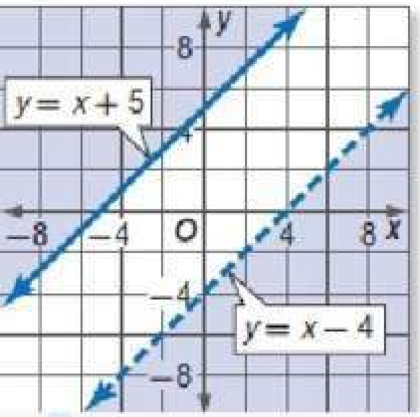
المجموعة الخالية
هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين Ø أو { }.

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة

حل النظام الآتي بيانيًّا:

$$y \geq x + 5$$
$$y < x - 4$$

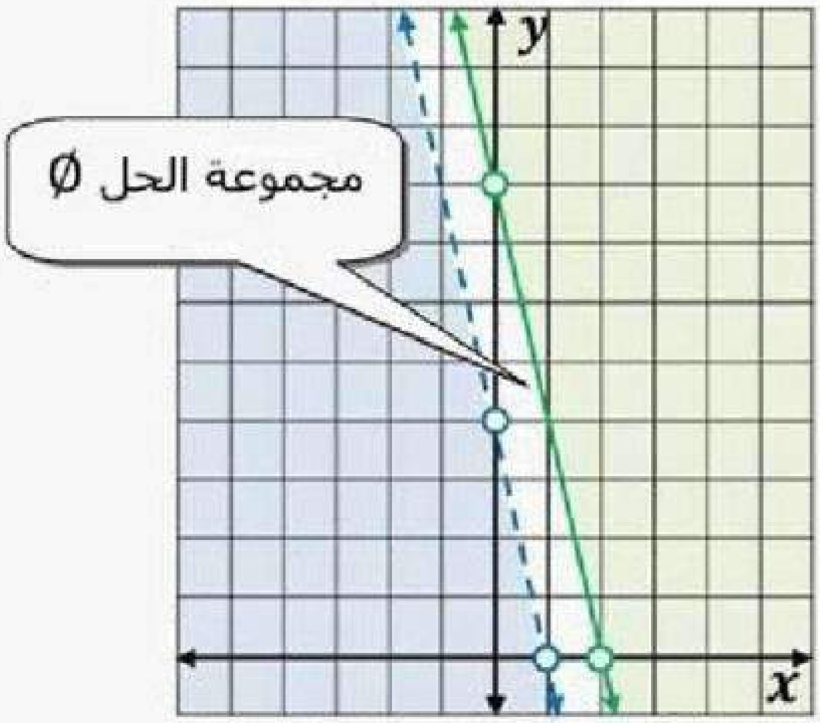


بتمثيل المتباينتين بيانيًّا، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي ϕ.

تحقق من فهمك :-

2A) حل النظام الآتي بيانياً: $y \geq -4x + 8$

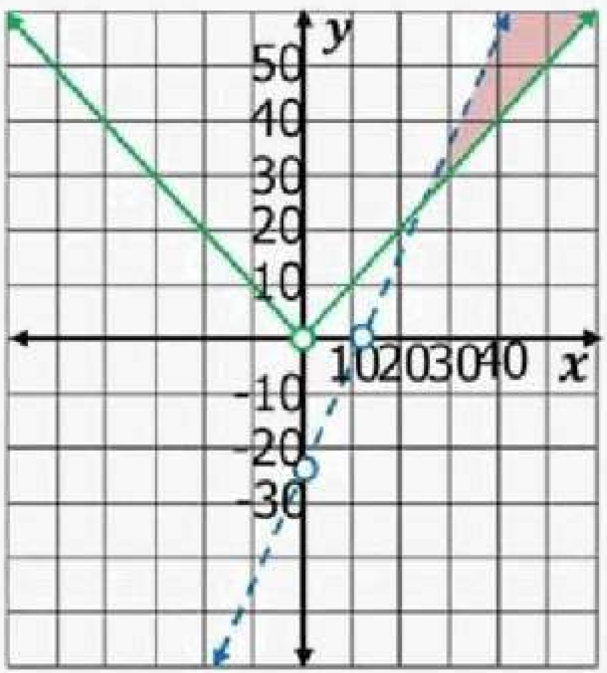
$y < -4x + 4$



تحقق من فهمك :ـ

2B) حل النظام الآتي بيانياً:

$y \geq |x|$
$y < 2x - 24$



١-٥ حـل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

تستعمل أنظمة المتباينات الخطية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة — كتابة نظام من المتباينات

إدارة الوقت: لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولًا زمنيًا استعدادًا لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثّله بيانيًا.

الرياضيات: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الرياضيات x، فإن هذا العدد لا يقل عن 7 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة أي أن:

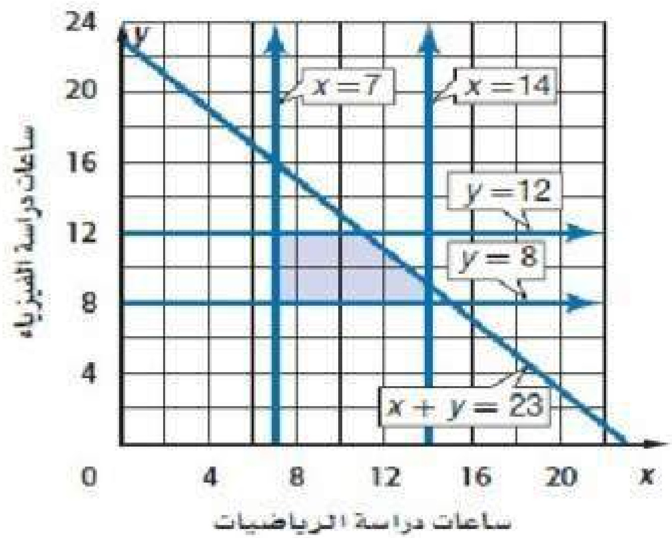
$$7 \le x \le 14$$

الفيزياء: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الفيزياء y، فإن هذا العدد لا يقل عن 8 ساعات ولا يزيد على 12 ساعة أي أن:

$$8 \le y \le 12$$

وبما أن إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة، ساعتان منها لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23 ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء فإن:

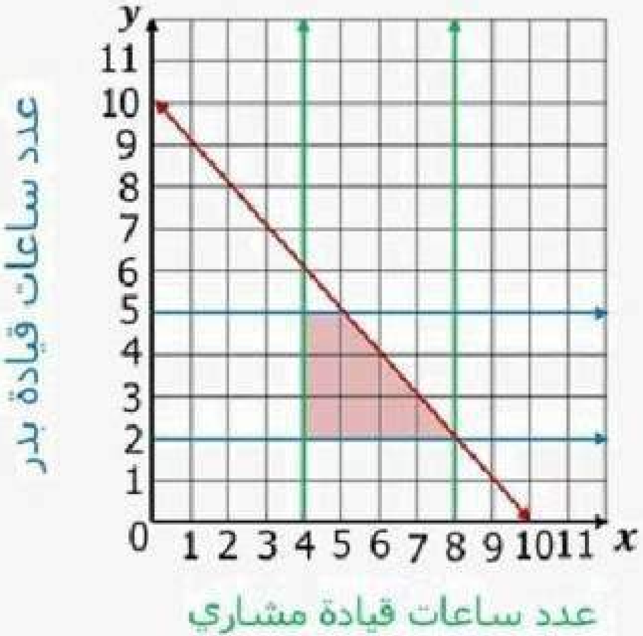
$$x + y \le 23$$



مثّل المتباينات بيانيًا. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 11 ساعة لدراسة الرياضيات.

تحقق من فهمك :-

سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة براً فتناوبا قيادة السيارة . فإذا كانت فترات قيادة **مشاري** للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات ، وكانت فترات قيادة **بدر** للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين و لا تزيد على 5 ساعات ، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يومياً لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ، ثم مثله بيانياً.



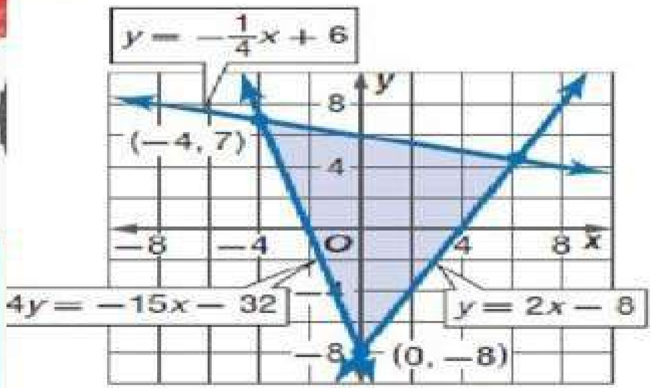
❶ $4 \le x \le 8$ ، ❷ $2 \le y \le 5$

❸ $x + y \le 10$

مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8,\ y \leq -\frac{1}{4}x + 6,\ 4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1: مثّل كل متباينة بيانيًّا.

الخطوة 2: من التمثيل البياني يمكنك إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجان المرتبان $(-4, 7)$, $(0, -8)$.

الخطوة 3: أوجد إحداثيي الرأس الثالث بحل النظام المكون من المعادلتين الخطيتين:

$y = 2x - 8\ ,\ y = -\frac{1}{4}x + 6$.

عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$	عوّض عن y بـ $2x - 8$
$2x = -\frac{1}{4}x + 14$	اجمع 8 لكلا الطرفين
$\frac{9}{4}x = 14$	اجمع $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين
$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$	اضرب كلا الطرفين في العدد $\frac{4}{9}$

جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$	عوّض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$
$= 12\frac{4}{9} - 8$	خاصية التوزيع
$= 4\frac{4}{9}$	بسّط

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right)$, $(0, -8)$, $(-4, 7)$.

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيي الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4 ، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

تحقق من فهمك :-

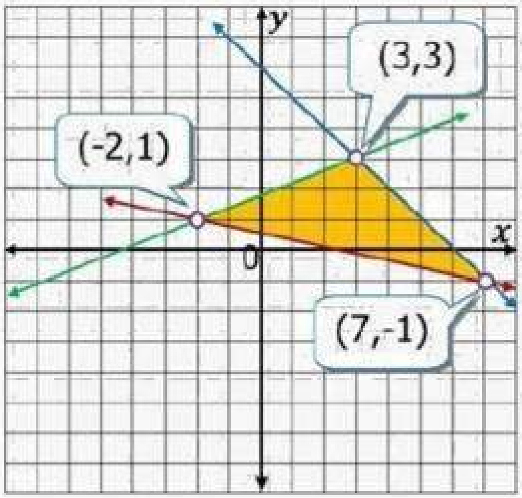
4A) جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$9y \geq -2x + 5$ ، $y \leq -x + 6$ ، $5y \leq 2x + 9$

$9y = -2x + 5$		
x	-2	2.5
y	1	0

$y = -x + 6$		
x	0	6
y	6	0

$5y = 2x + 9$		
x	0.5	-4.5
y	2	0



تحقق من فهمك :-

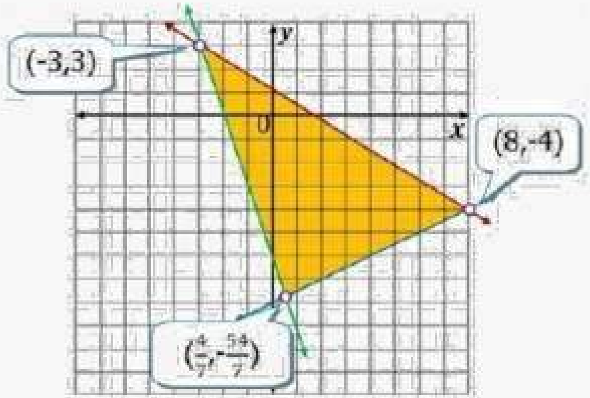
4B) جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$11y + 7x \le 12$ ، $2y \ge x - 16$ ، $y \ge -3x - 6$

$11y + 7x = 12$		
x	-3	8
y	3	-4

$2y = x - 16$		
x	4	6
y	-6	-5

$y = -3x - 6$		
x	0	-2
y	-6	0



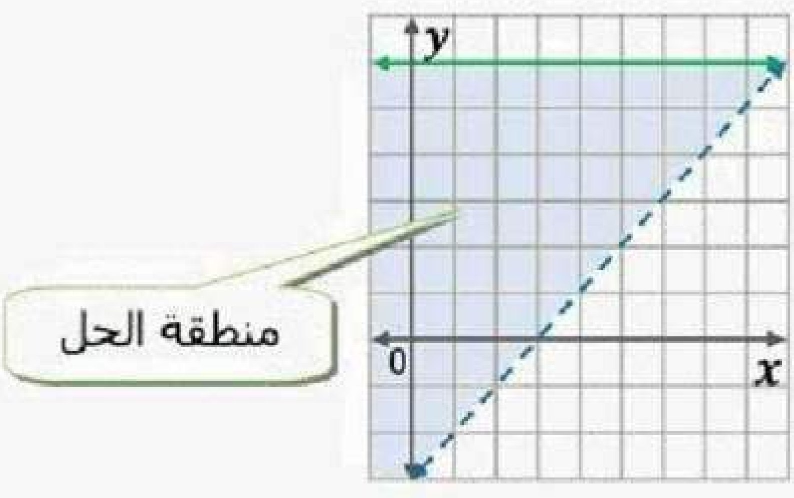
تـــأكـد :-

مثـال 1,2

حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

1) $y \le 6$

$y > -3 + x$



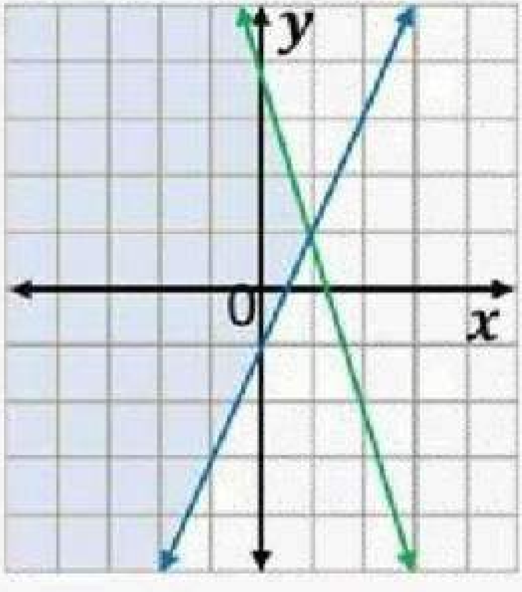
تـــأكـد :-

مثـال 1,2

حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

2) $y \le -3x + 4$

$y \ge 2x - 1$



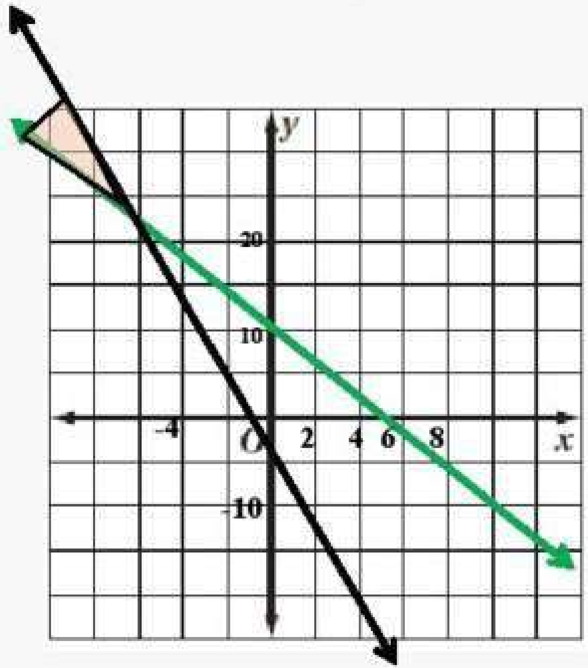
تـــأكـد :-

مثـال 1,2

حل كل نظام فيما يأتي بيانياً:

3) $y > -2x + 10$

$$y \le -3x - 3$$



x	0	-1
y	-3	0

x	0	5
y	10	0



تـــأكـد :-

مثال 3

4) **مشتريات**: خصصت ليلى مبلغاً لا يتجاوز 350 ريالاً لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمنها 35ريالاً، ويباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمنها 25ريالاً . فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلماً على الأقل من كلا النوعين

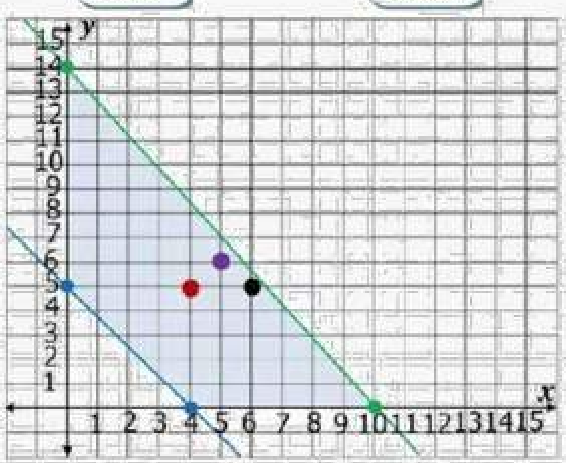
a) مثّل بيانياً نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

أفرض أن x رزم من النوع الأول ، y رزم من النوع الثاني.

$10x + 8y \geq 40$ ، $35x + 25y \leq 350$

العدد ← $10x + 8y \geq 40$

الثمن ← $35x + 25y \leq 350$



b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين

x	4	5	6
y	5	6	5

تــــأكـد :-

مثال 4

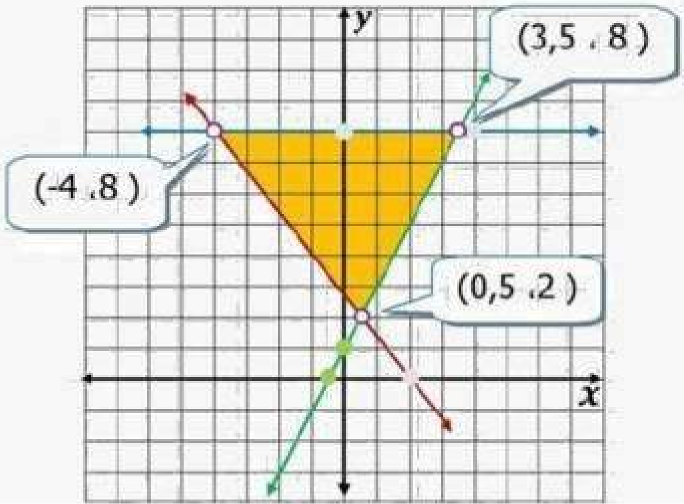
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

5) $y \geq 2x + 1$ ، $y \leq 8$ ، $4x + 3y \geq 8$

$y = 2x + 1$		
x	0	-0.5
y	1	0

$y = 8$		
x	0	4
y	8	8

$4x + 3y = 8$		
x	0.5	2
y	2	0



تـــأكـد :-

مثال 4

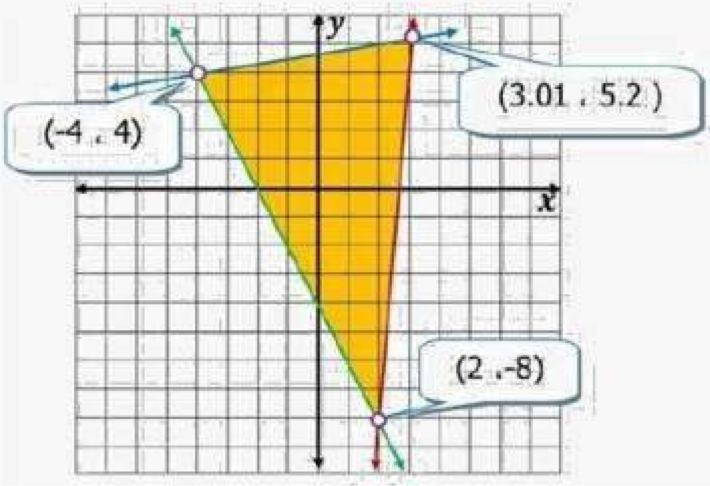
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(6 $y \geq -2x - 4$ ، $6y \leq x + 28$ ، $y \geq 13x - 34$

$y = 13x - 34$		
x	3	2
y	5	-8

$6y = x + 28$		
x	2	-4
y	5	4

$y = -2x - 4$		
x	0	-2
y	-4	0



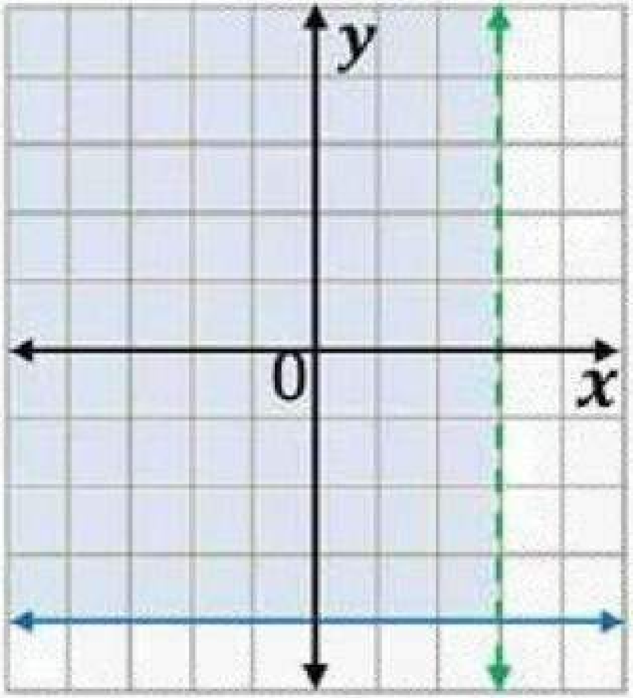
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

7) $x < 3$

$y \geq -4$



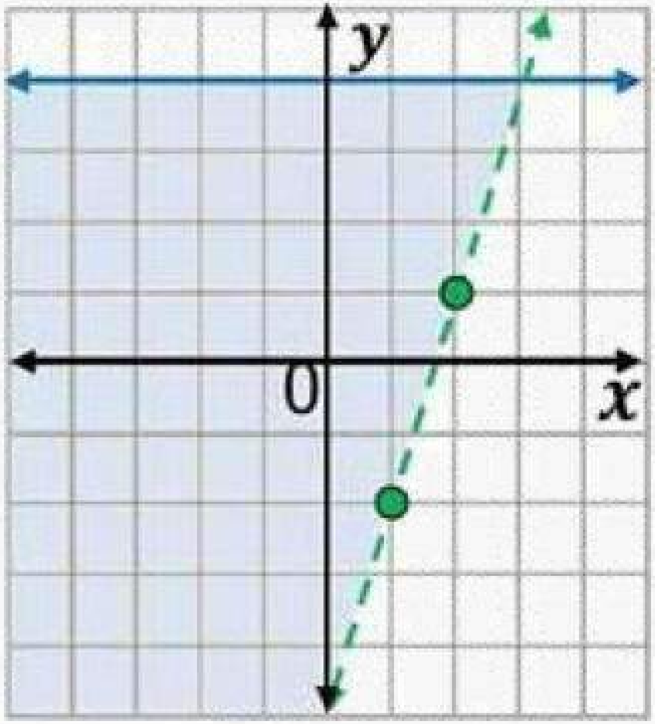
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

8) $y > 3x - 5$

$y \leq 4$



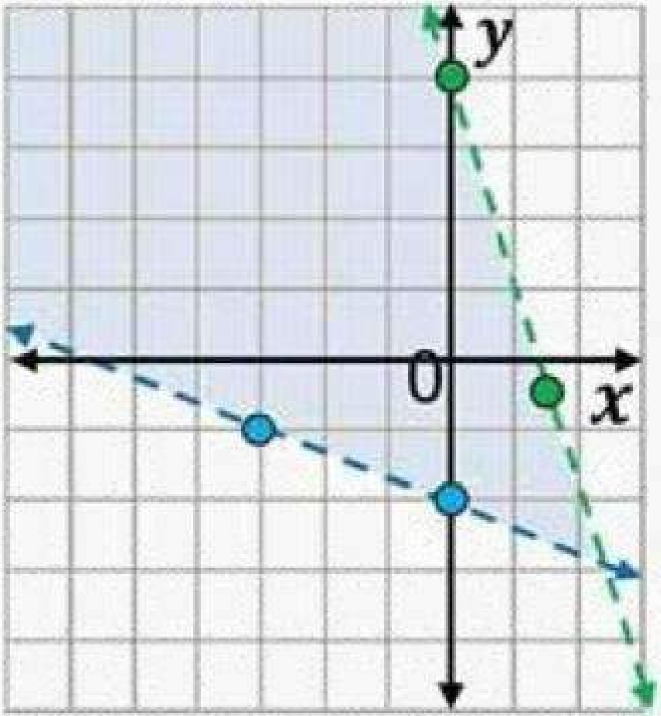
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

9) $y < -3x + 4$

$3y + x > -6$



تدرب وحل المسائل :-

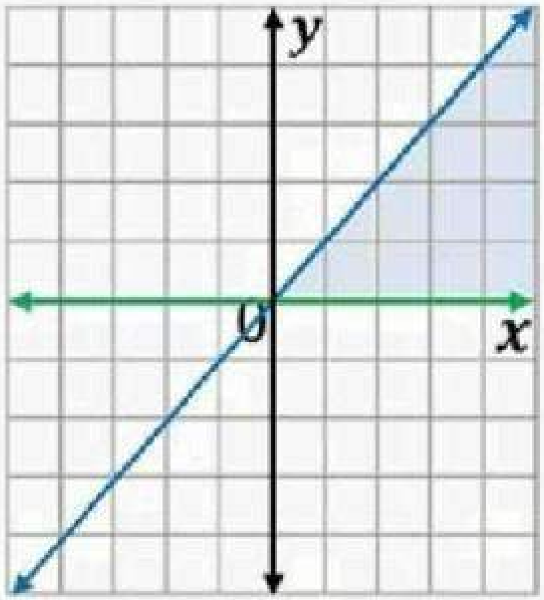
مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

10)

$y \geq 0$

$y \leq x$



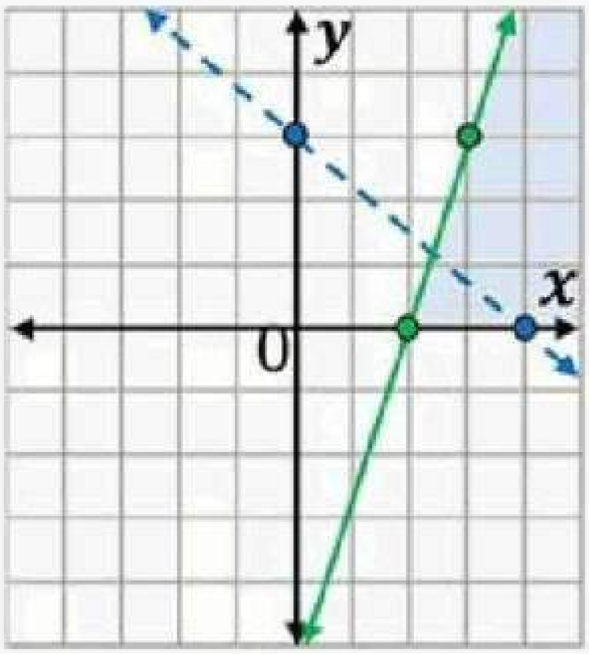
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

11) $6x \ -2y \geq 12$

$3x + 4y > 12$



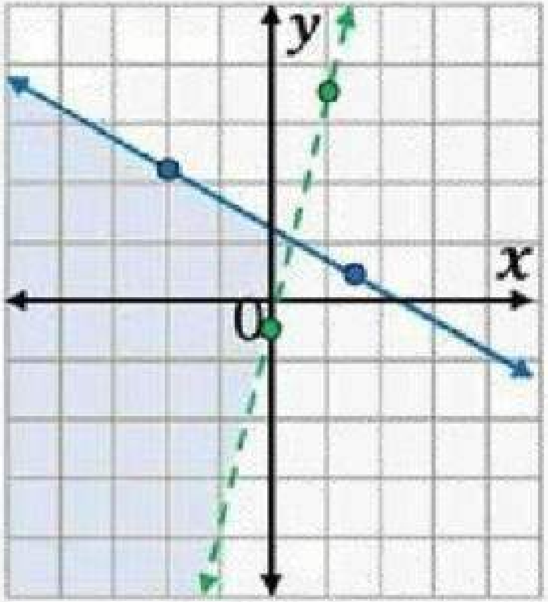
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

12) $-8x > -2y - 1$

$-4y \geq 2x - 5$



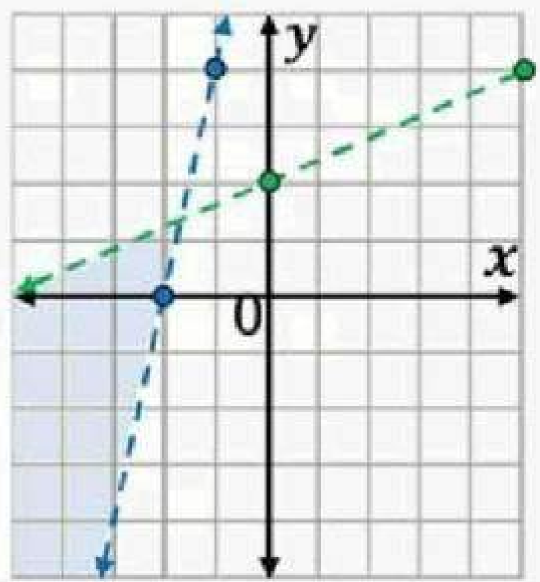
تدرب وحل المسائل :–

مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

13) $5y < 2x + 10$

$y - 4x > 8$



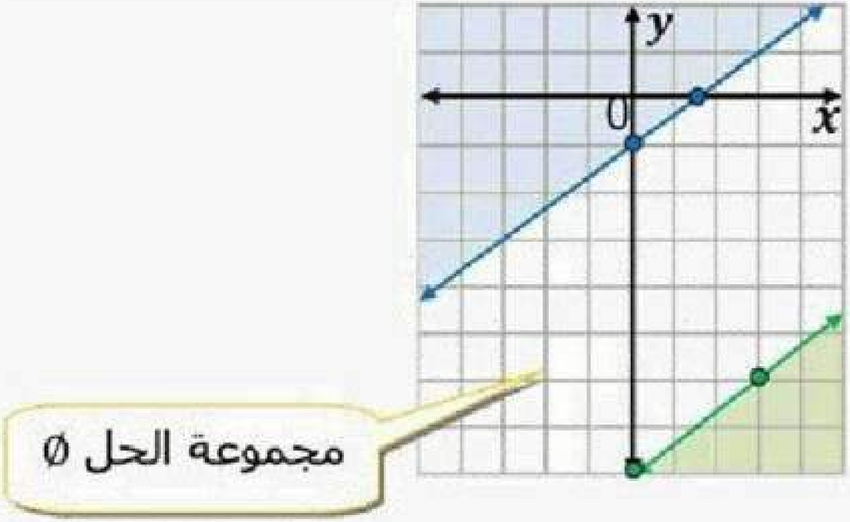
تـدرب وحـل المسـائل :–

مثـال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

14) $3y - 2x \le -24$

$$y \ge \frac{2}{3}x - 1$$



تدرب وحل المسائل :-

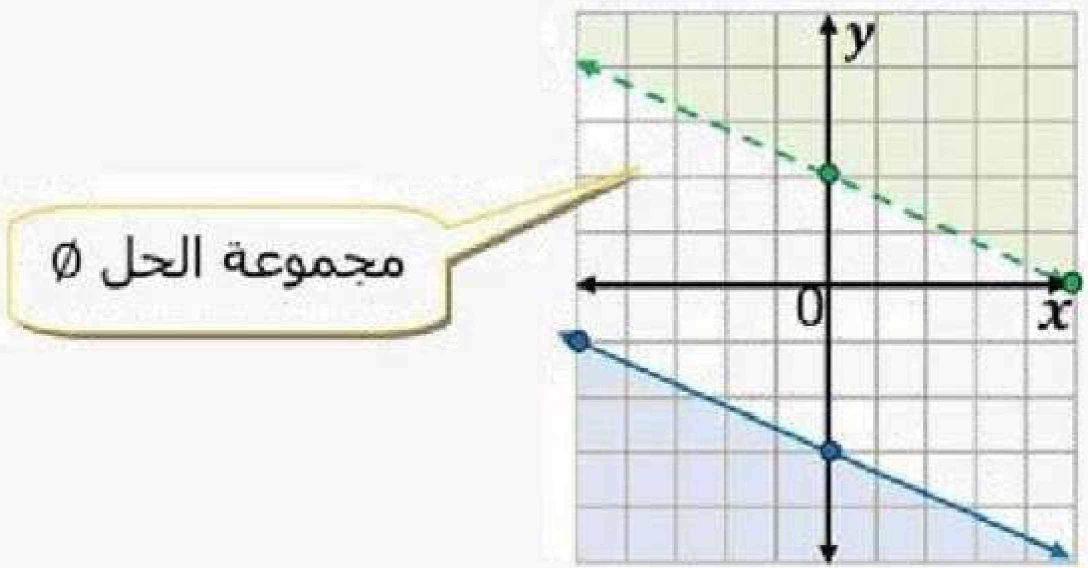
مثال 1,2

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

15)

$$y > -\frac{2}{5}x + 2$$

$$5y \leq -2x - 15$$

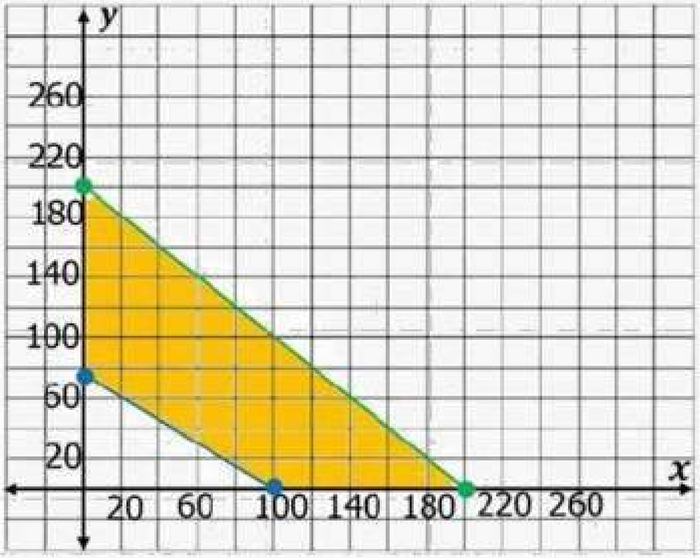


مثال3

16) **عمل جزئي**: يعمل سعيد عملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجراً؛ فيتقاضى 9 ريالات على كل ساعة في العمل الأول ، و 12 ريالاً عن كل ساعة في العمل الثاني ، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعياً، فمثّل بيانياً نظاماً من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين ، ليجمع مبلغاً لا يقل عن 925ريالاً في 8 أسابيع.

أفرض أن x عدد ساعات العمل الأول ، y عدد ساعات العمل الثاني.

$9x + 12y \geq 925$ ، $x + y \leq 200$



مثال 4

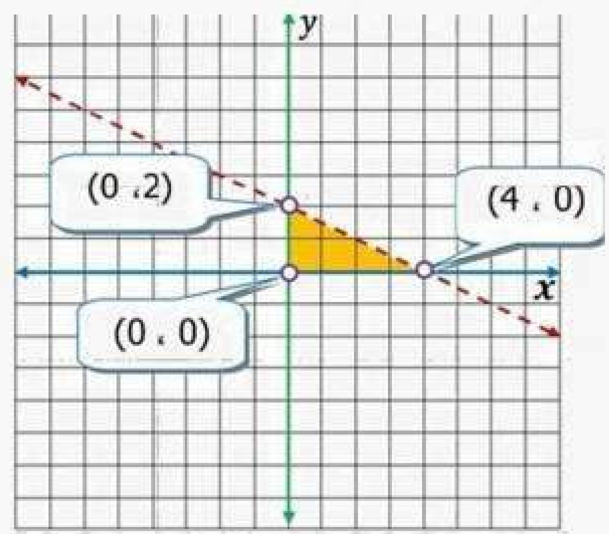
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

17) $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $x + 2y < 4$

$x = 0$		
x	0	0
y	أي عدد	

$y = 0$		
x	أي عدد	
y	0	0

$x + 2y = 4$		
x	0	4
y	2	0



مثال 4

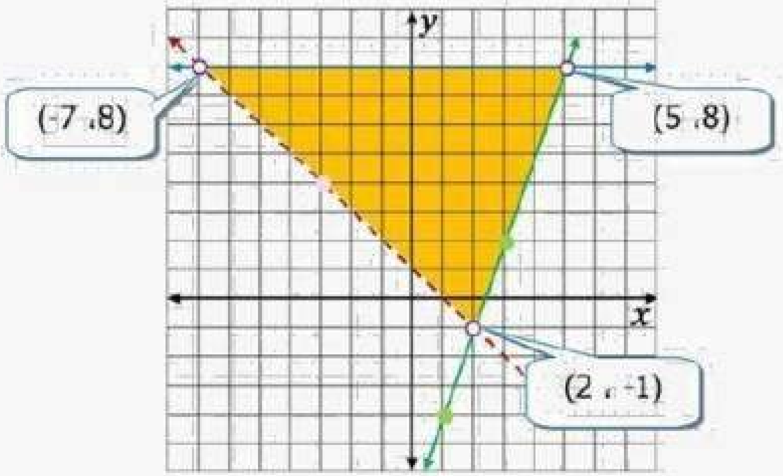
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

18) $y \geq 3x - 7$ ، $y \leq 8$ ، $x + y > 1$

$x + y = 1$		
x	2	-3
y	-1	4

$y = 8$		
x	0	4
y	8	8

$y = 3x - 7$		
x	1	3
y	-4	2



مثال 4

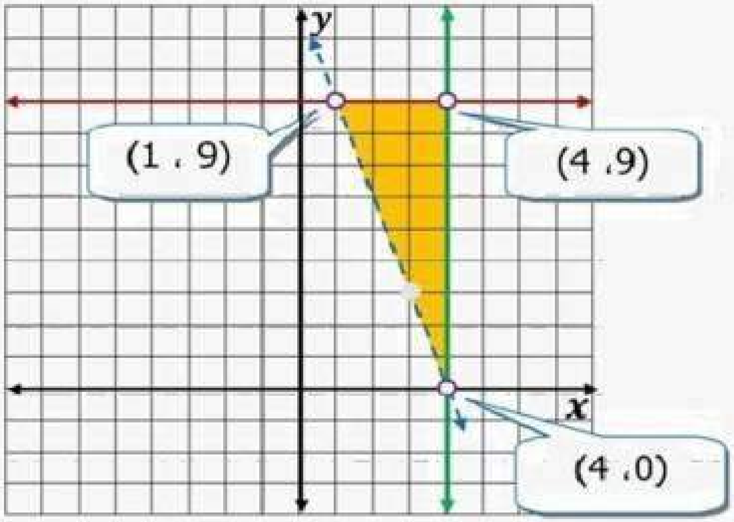
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(19 $x \leq 4$ ، $y > -3x + 12$ ، $y \leq 9$

$x = 4$		
x	4	4
y	أي عدد	

$y = -3x + 12$		
x	3	4
y	3	0

$y = 9$		
x	أي عدد	
y	9	9



مثال 4

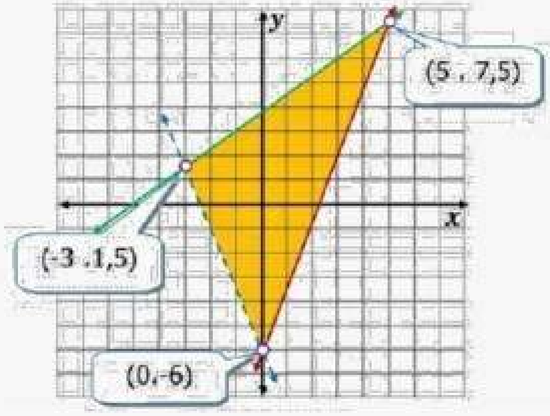
جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

$10y + 60 \geq 27x$ ، $2y + 5x > -12$ ، $-3x + 4y \leq 15$ (20

$10y + 60 = 27x$		
x	0	5
y	-6	7.5

$2y + 5x = -12$		
x	0	-2
y	-6	-1

$-3x + 4y = 15$		
x	1	-5
y	4.5	0



مثال 4

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

21)

$$8y - 19x < 74$$

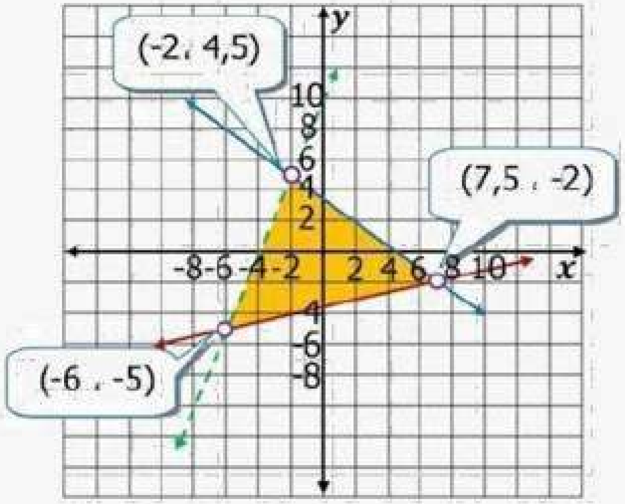
$$38y + 26x \le 119$$

$$54y - 12x \ge -198$$

$54y - 12x = -198$		
x	7.5	3
y	-2	-3

$38y + 26x = 119$		
x	-2	7.5
y	4.5	-2

$8y - 19x = 74$		
x	-6	-2
y	-5	4.5



مثال 4

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(22 $6y - 24x \geq -168$

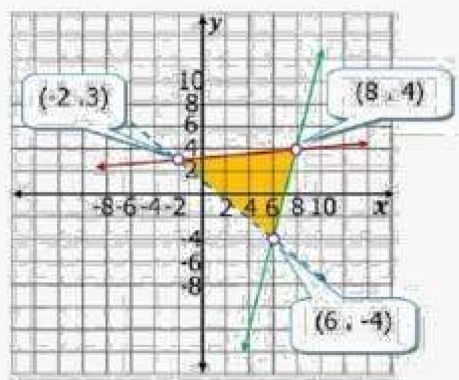
$8y + 7x > 10$

$20y - 2x \leq 64$

$6y - 24x = -168$		
x	6	8
y	-4	4

$8y + 7x = 10$		
x	-2	6
y	3	-4

$20y - 2x = 64$		
x	-2	8
y	3	4



تـدرب وحـل المسائل :-

23) اتصالات: يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهاراً عن ضعف عددها ليلاً، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلاً عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف.

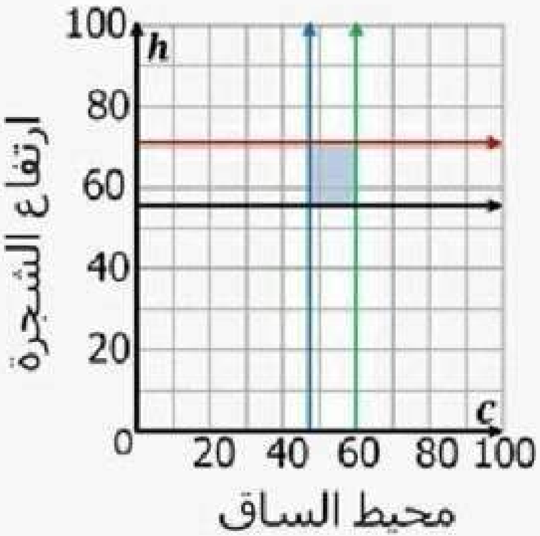
x عدد الدقائق نهاراً ، y عدد الدقائق ليلاً .

$y \geq 200$, $x \geq 0$ ، $x \geq 2y$, $x + y \leq 800$



تدرب وحل المسائل :-

24) أشجار: تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعاً للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع و محيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:



المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56-72	40-55	أقل من 39
محيط الساق(in)	أكثر من 60	48-60	34-48	أقل من 33

a) أكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلاً من: الارتفاع h و محيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثّله بيانياً.

$h \geq 56$, $h \leq 72$, $c \geq 48$, $c \leq 60$

b) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها $48ft$ ؟ ثم أوجد محيط ساقها المتوقع.

الأشجار المتوسطة السيطرة $34 - 48\ in$

تدرب وحل المسائل :-

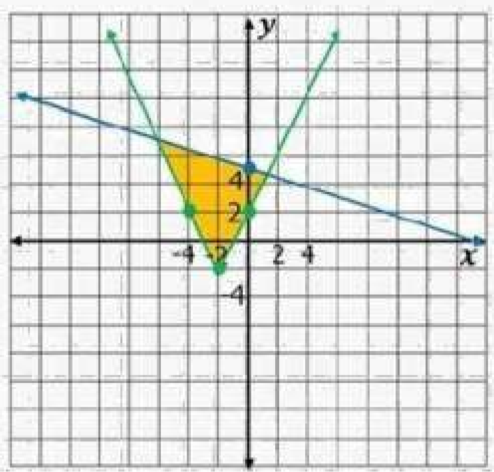
حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

(25 $y \geq |2x + 4| - 2$ ، $3y + x \leq 15$

$x < -2$	$x = -2$	$x > -2$
$-2x - 6$	-2	$2x + 2$

x	-2	-1
$2x + 2$	-2	0

x	-2	-3
$-2x - 6$	-2	0

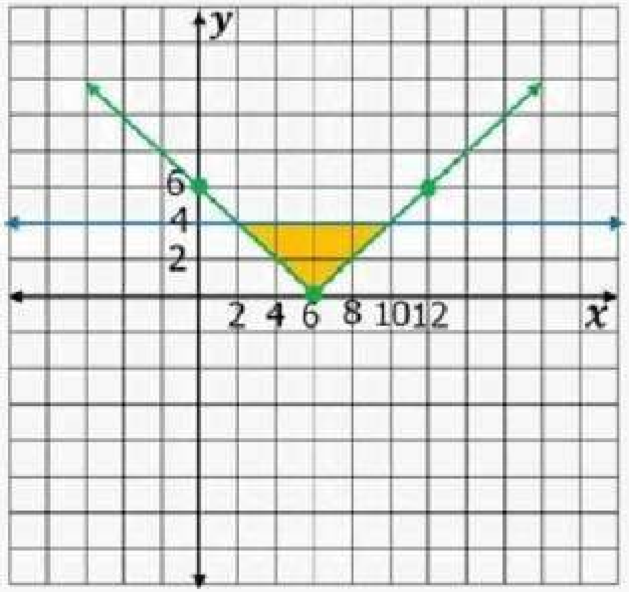


تـدرب وحـل المسائل :-

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

(26 $y \geq |6 - x|$ ، $|y| \leq 4$

$x < 6$	$x = 6$	$x > 6$
$6 - x$	0	$-6 + x$



x	6	0
$6 - x$	0	6

x	6	12
$-6 + x$	0	6

تدرب وحل المسائل :-

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

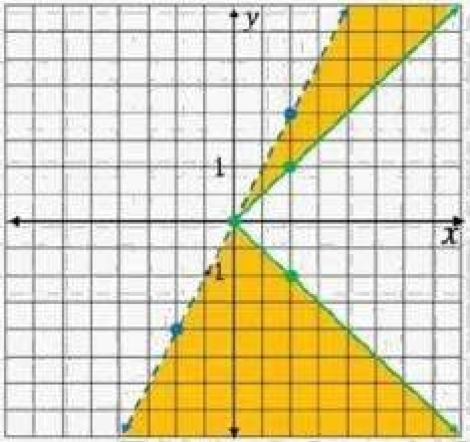
(27 $|y| \geq x$ ، $y < 2x$

$y < 0$ $y = 0$ $y > 0$

$-y$ 0 y

y	0	-1
$x = -y$	0	1

y	0	1
$x = y$	0	1



تدرب وحل المسائل :–

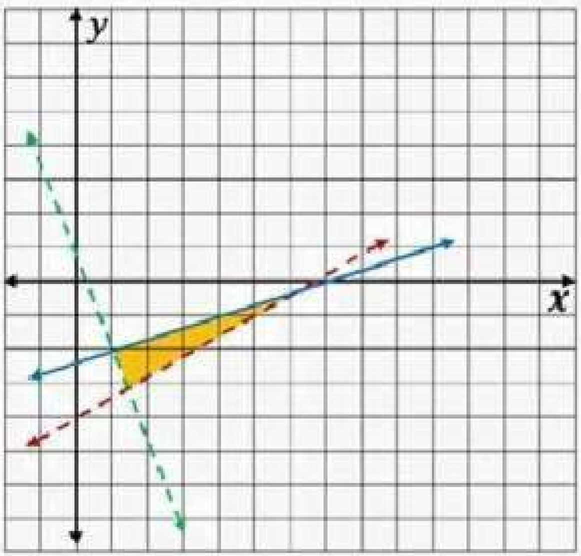
حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

28) $y > -3x + 1$ ، $4y \le x - 8$ ، $3x - 5y < 20$

$y = -3x + 1$		
x	0	1
y	1	-2

$4y = x - 8$		
x	0	4
y	-2	-1

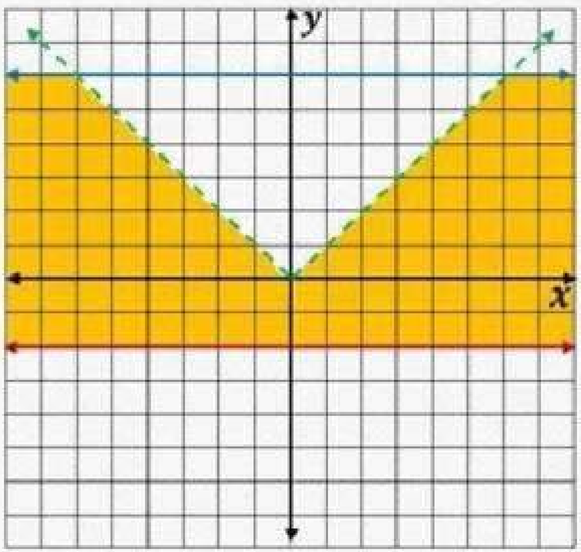
$3x - 5y = 20$		
x	0	5
y	-4	-1



تدرب وحل المسائل :–

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

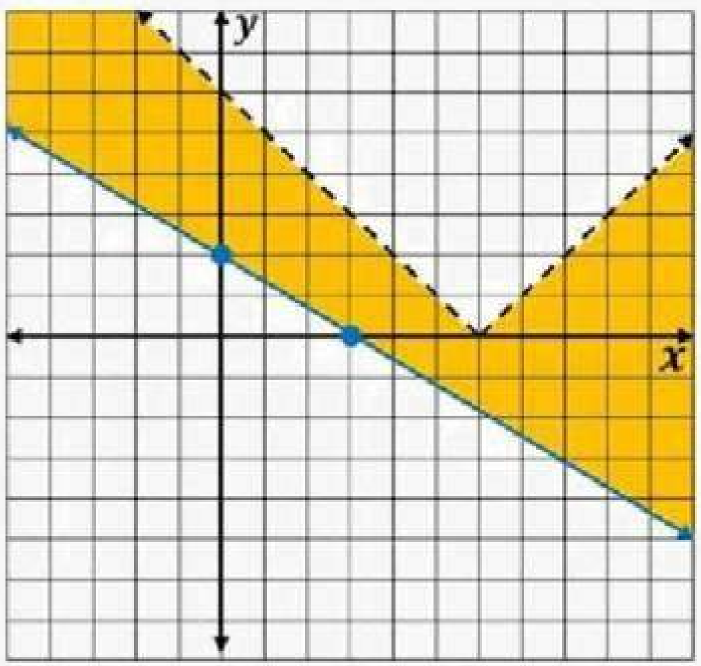
30) $|x| > y$ ، $y \leq 6$ ، $y \geq -2$



تدرب وحل المسائل :–

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

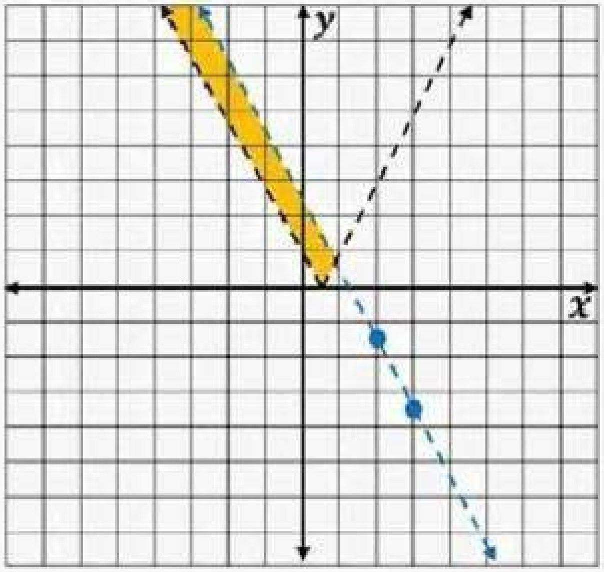
$y \leq |x - 6|$ ، $2x + 3y \geq 6$ (31



تـدرب وحـل المسائل :-

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

32) $8x + 4y < 10$ ، $y > |2x - 1|$

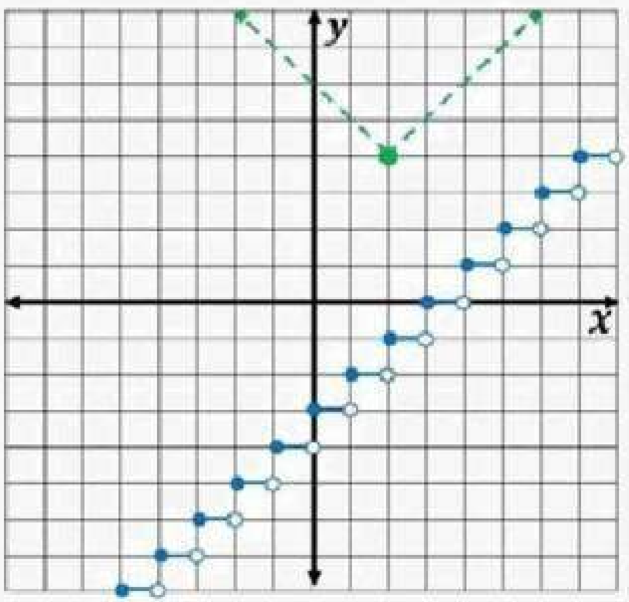


تدرب وحل المسائل :-

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

(33 $y \geq |x-2|+4$ ، $y \leq [\![x]\!]-3$

مجموعة الحل Ø

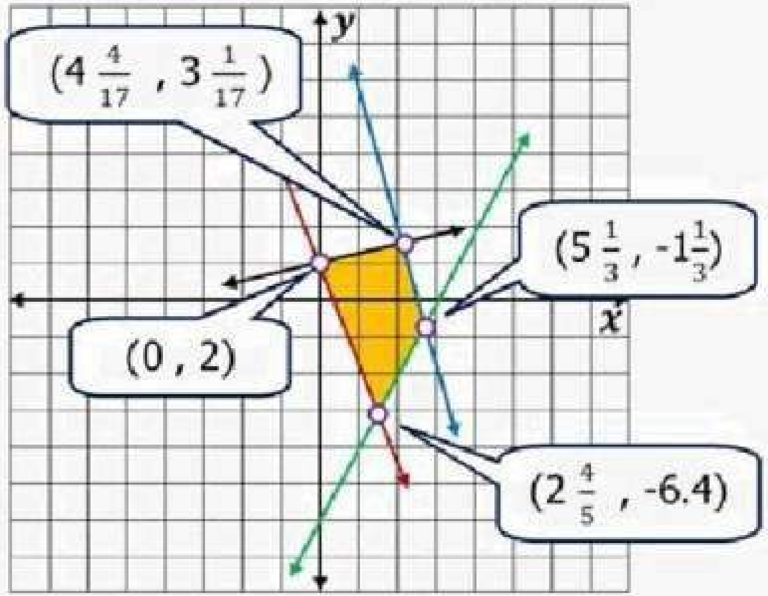


تدرب وحل المسائل :-

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

(34 $y \geq 2x - 12$ ، $y \leq -4x + 20$

$4y - x \leq 8$ ، $y \geq -3x + 2$



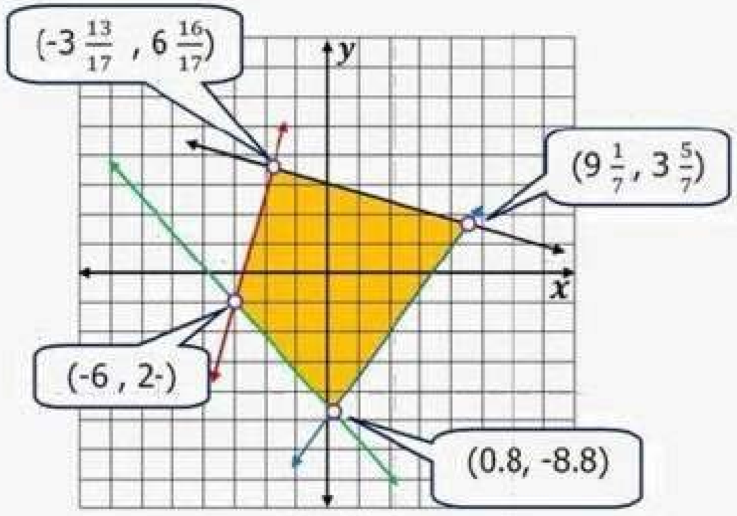
تدرب وحل المسائل :-

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي :

(35

$y \geq -x - 8$ ، $2y \geq 3x - 20$

$4y + x \leq 24$ ، $y \leq 4x + 22$

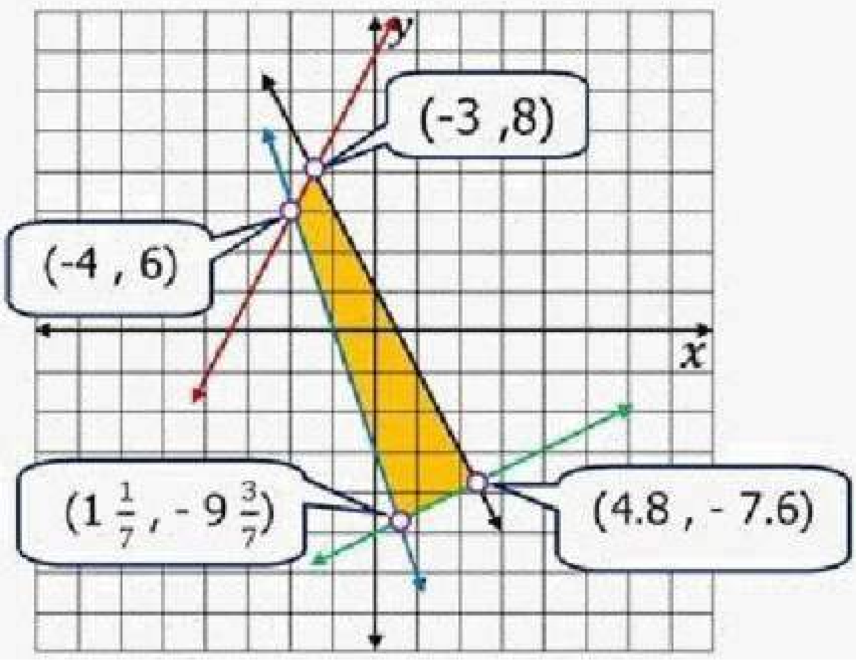


تدرب وحل المسائل :-

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

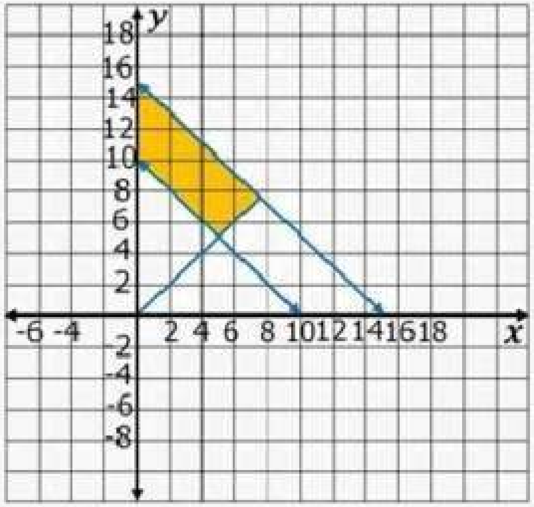
(35 $2y - x \geq -20$ ، $y \geq -3x - 6$

$y \geq -2x + 2$ ، $y \leq 2x + 14$



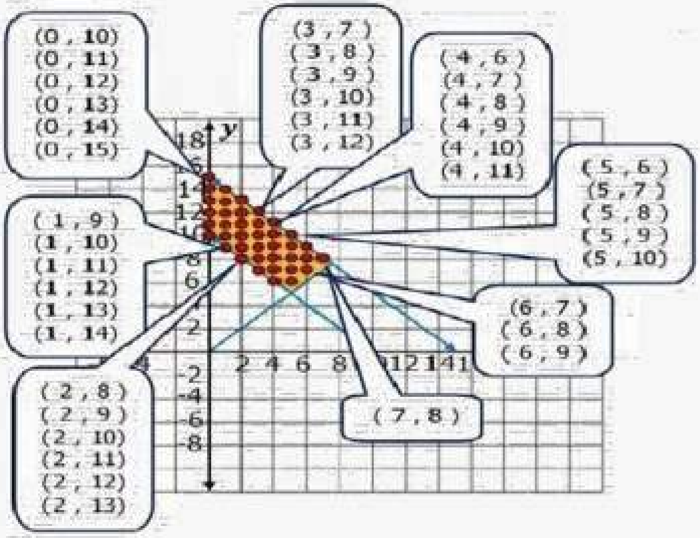
تـدرب وحـل المسـائل :-

(37 يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15لاعباً ليشكل فريقاً على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني.



a) اكتب نظام متباينات يمثلّ ذلك الموقف، ومثله بيانياّ.

b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين.



تدرب وحل المسائل :-

38) **إدارة الوقت**: يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن . فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعة أسبوعياً. ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل ذلك الوقف، ومثله بيانياً.



أفرض أن w هي عدد ساعات تلاوة القرآن و e هي عدد ساعات ممارسة الرياضة.

$10 \le w \le 14$ ، $4 \le e \le 10$ ، $w + e \le 20$

الفهرس



الفصل الأول
٦-١ البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

هناك **قيود** إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الاحيان اوضاعا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

فيما سبق:
درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:
القيود constraints
البرمجة الخطية linear programming
محدودة bounded
غير محدودة unbounded
الحل الأمثل optimize

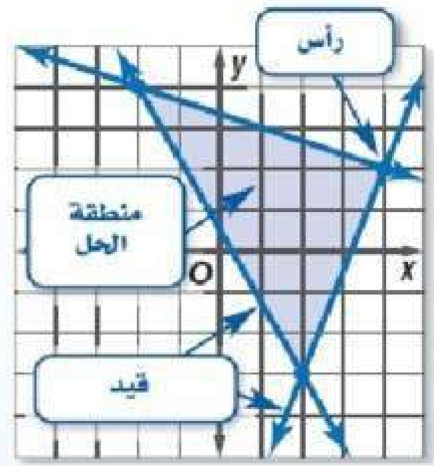
الفصل الأول

٦-١ البرمجة الخطية والحل الأمثل

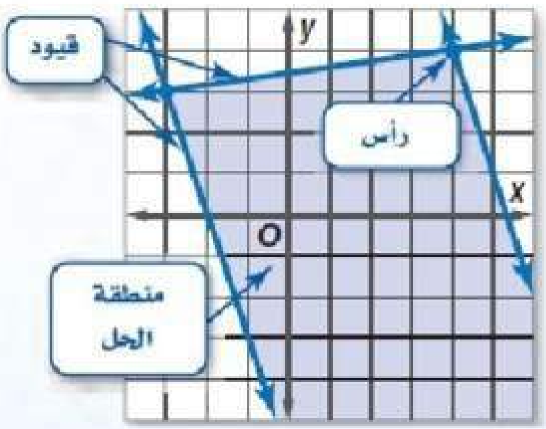
Optimization with Linear Programming

مفهوم أساسي — **منطقة الحل**

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل محدودة (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.



الفصل الأول
٦-١ البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

قراءة الرياضيات

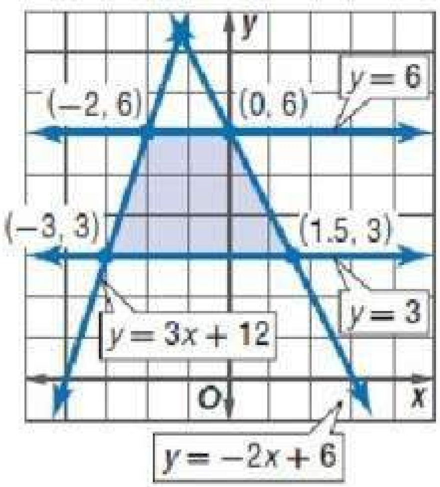
رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y. وتُقرأ f لـ x و y.

مثال 1 منطقة الحل المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

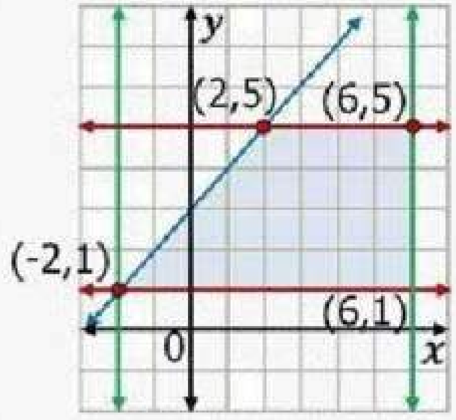
الفصل الأول
١-٦ البرمجة الخطية والحل الأمثل

تحقق من فهمك :-

1A) مثل نظام المتباينات الآتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$-2 \le x \le 6$$
$$1 \le y \le 5$$
$$y \le x + 3$$
$$f(x\ ,\ y) = -5x + 2y$$

الخطوة1: مثل المتباينات بيانياً، وحدد إحداثيات الرؤوس



الخطوة2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

$(x\ ,\ y)$	$-5x + 2y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(-2,1)	-5(-2)+2(1)	12	العظمى
(2,5)	-5(2)+2(5)	0	
(6,5)	-5(6)+2(5)	-20	
(6,1)	-5(6)+2(1)	-28	الصغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 12 وتكون عند النقطة (2,1-)، والقيمة الصغرى للدالة تساوي 28- وتكون عند النقطة (6,1)

تحقق من فهمك :-

1B) مثل نظام المتباينات الآتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

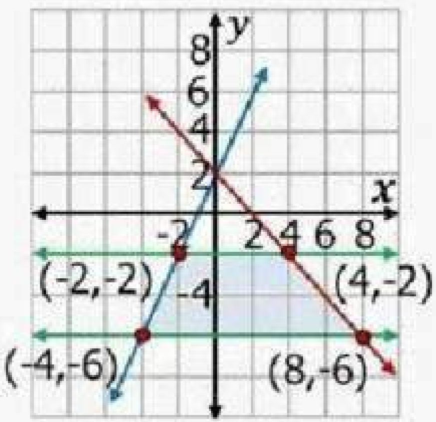
$-6 \leq y \leq -2$

$y \leq -x + 2$

$y \leq 2x + 2$

$f(x, y) = 6x + 4y$

الخطوة1: مثل المتباينات بيانياً، وحدد إحداثيات الرؤوس



الخطوة2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$6x + 4y$	$f(x, y)$	القيمة
(-4,-6)	6(-4)+4(-6)	-48	الصغرى
(-2,-2)	6(-2)+4(-2)	-20	
(4,-2)	6(4)+4(-2)	16	
(8,-6)	6(8)+4(-6)	24	العظمى

القيمة العظمى للدالة تساوي 24 وتكون عند النقطة (8,-6)،
والقيمة الصغرى للدالة تساوي 48- وتكون عند النقطة (4,-6-)

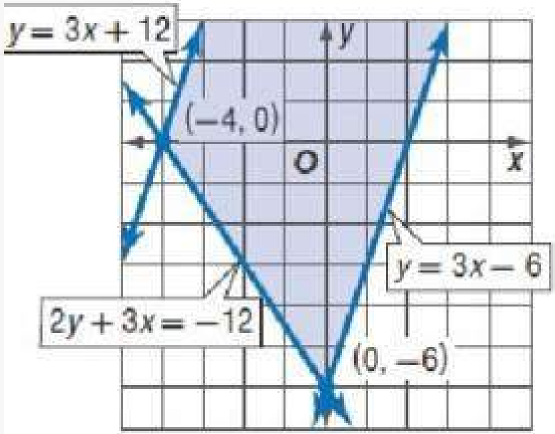
الفصل الأول
٦-١ البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$2y + 3x \geq -12$, $y \leq 3x + 12$, $y \geq 3x - 6$, $f(x, y) = 9x - 6y$



مثّل المتباينات بيانيًا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى - إن وجدت - تكون عند الرؤوس.

(x, y)	9x − 6y	f(x, y)
(−4, 0)	9(−4) − 6(0)	−36
(0, −6)	9(0) − 6(−6)	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (6− ,0)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي (8 ,0) وتُعطي القيمة 48− للدالة وهي أقل من 36−.

تنبيه

القيمة العظمى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدّد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

تحقق من فهمك :ـ

2A) مثل نظام المتباينات الآتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

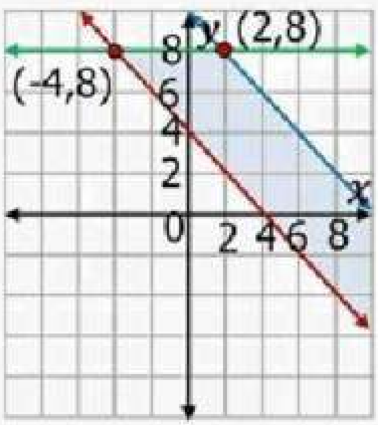
$y \leq 8$

$y \geq -x + 4$

$y \leq -x + 10$

$f(x , y) = -6x + 8y$

الخطوة1: مثل المتباينات بيانياً، وحدد إحداثيات الرؤوس



الخطوة2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x , y)	$-6x + 8y$	$f(x , y)$
(-4,8)	-6(-4)+8(8)	88
(2,8)	-6(2)+8(8)	52

القيمة العظمى للدالة تساوي 88 وتكون عند النقطة (-4,8)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل (4 , 4) وتعطى القيمة 8 للدالة وهي أقل من 52.

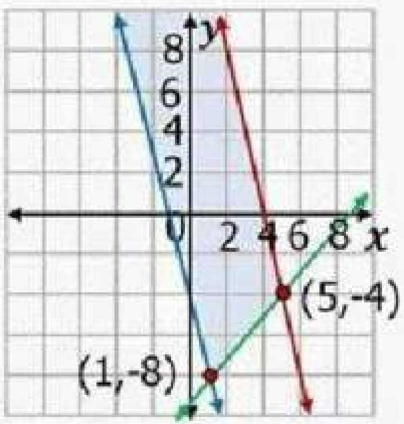
تحقق من فهمك :-

2B) مثل نظام المتباينات الآتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

2B)

$$y \geq x - 9$$
$$y \leq -4x + 16$$
$$y \geq -4x - 4$$
$$f(x, y) = 10x + 7y$$

الخطوة1: مثل المتباينات بيانياً، وحدد إحداثيات الرؤوس



الخطوة2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x , y)	$10x + 7y$	$f(x , y)$
(1,-8)	10(1)+7(-8)	-46
(5,-4)	10(5)+7(-4)	22

القيمة الصغرى للدالة تساوي 46- وتكون عند النقطة (1,-8)، ولا توجد قيمة عظمى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل (2 , 2) وتعطى القيمة 34 للدالة وهي أكبر من 22.



الفصل الأول

٦-١ البرمجة الخطية والحل الأمثل



الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

المصدر: جريدة الرياض/ العدد 14103، عام 1428 هـ

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثّل نظام المتباينات بيانيًا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

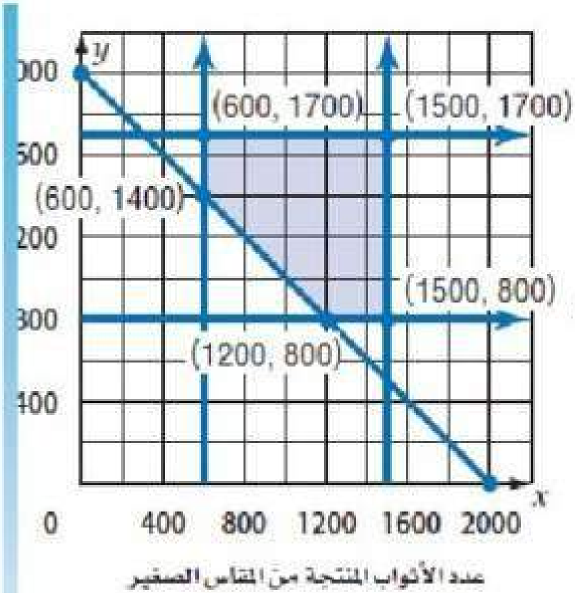
أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الخطوة 1: افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير

الخطوة 2: $600 \le x \le 1500$

$800 \le y \le 1700$

$x + y \ge 2000$



الخطوتان 3 و 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5: الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي: $f(x, y) = 55x + 70y$.

الخطوة 6:

(x, y)	$55x + 70y$	$f(x, y)$	
(600, 1700)	55(600) + 70(1700)	152000	
(600, 1400)	55(600) + 70(1400)	131000	
(1500, 1700)	55(1500) + 70(1700)	201500	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 70(800)	138500	
(1200, 800)	55(1200) + 70(800)	122000	← قيمة صغرى

الخطوة 7: يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

تحقق من فهمك :-

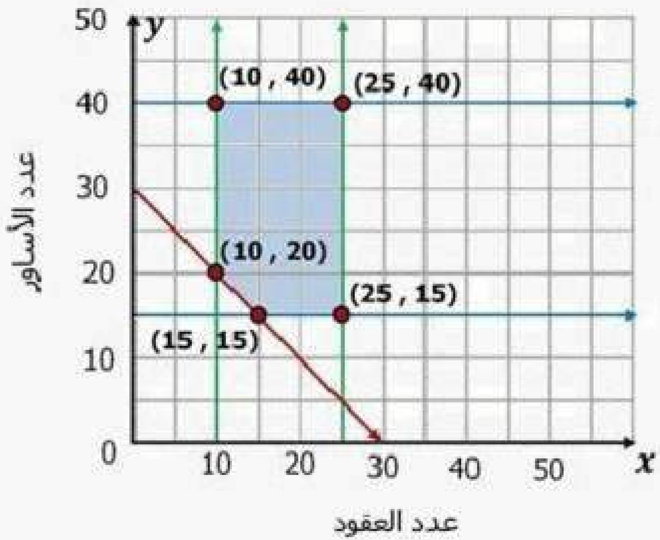
3) **مجوهرات:** يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقداً، ومن 15 إلى 40 سواراً شهرياً. فإذا كانت أجرة صياغة العقدة 50ريالاً . وأجرة صياغة السوار 30ريالاً، وصاغ في أحد الأشهر على الأقل 30 قطعة من العقود والأساور، فكم قطعة من كلا النوعين عليه صياغتها ليحصل على أكبر أجر؟

نفرض أن عدد العقود هو x ، وعدد الأساور هو y.

القيود(الشروط)

$x + y \geq 30$ ، $15 \leq y \leq 40$ ، $10 \leq x \leq 25$

الهدف: الحصول على أكبر أجر.



(x,y)	$50x + 30y$	$f(x,y)$	القيمة
(10 , 40)	50(10) + 30(40)	1700	
(25 , 40)	50(25) + 30(40)	2450	العظمى
(25 , 15)	50(25) + 30(15)	1700	
(15 , 15)	50(15) + 30(15)	1200	
(10 , 20)	50(10) + 30(20)	1100	الصغرى

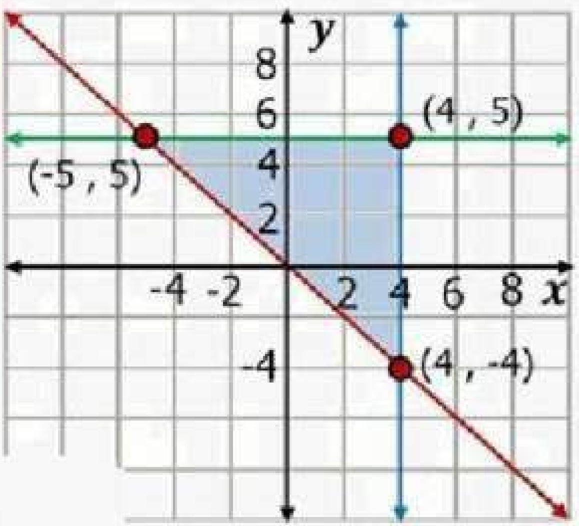
يجب على فهد صياغة 25 عقداً، و 40 سواراً ليحصل على أكبر أجر.

تـــأكـد :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيّاً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

1) $y \leq 5$ ، $x \leq 4$ ، $y \geq -x$ ، $f(x,y) = -3x - 6y$



(x , y)	$5x - 2y$	$f(x , y)$	القيمة
(-5 , 5)	5(−5) − 2(5)	-35	صغرى
(4 , 5)	5(4) − 2(5)	10	
(4 , -4)	5(4) − 2(−4)	28	عظمى



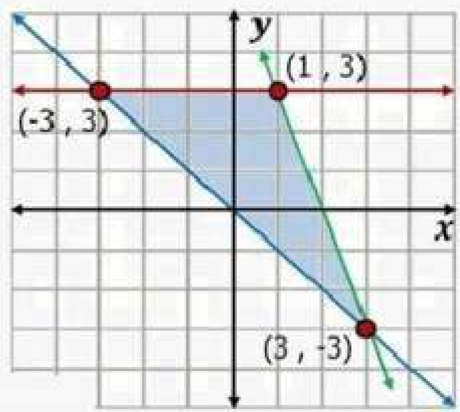
تـــأكـد :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيّاً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

2) $y \leq -3x + 6$ ، $-y \leq x$ ، $y \leq 3$

$f(x,y) = 8x + 4y$



القيمة	$f(x , y)$	$8x + 4y$	(x , y)
الصغرى	-12	$8(-3) + 4(3)$	(-3 , 3)
العظمى	20	$8(1) + 4(3)$	(1 , 3)
	12	$8(3) + 4(-3)$	(3 , -3)

تـــأكـد :-

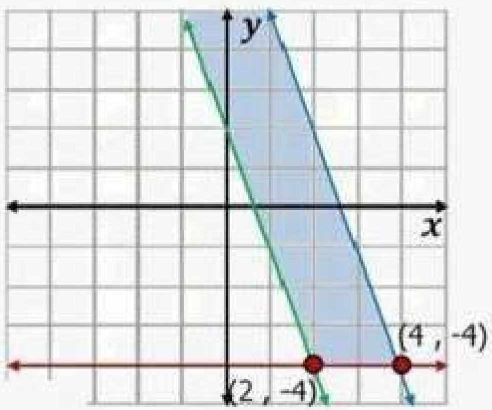
مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

3) $y \geq -3x + 2$ ، $9x + 3y \leq 24$ ، $y \geq -4$

$f(x,y) = 2x + 14y$

القيمة	$f(x , y)$	$2x + 14y$	(x , y)
الصغرى	-52	2(2) + 14(-4)	(2 , -4)
	-48	2(4) + 14(-4)	(4 , -4)



القيمة الصغرى للدالة تساوي 52- وتكون عند النقطة (2,-4)، ولا توجد قيمة عظمى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل (3 , 1) وتعطى القيمة 44 للدالة وهي أكبر من 48-.

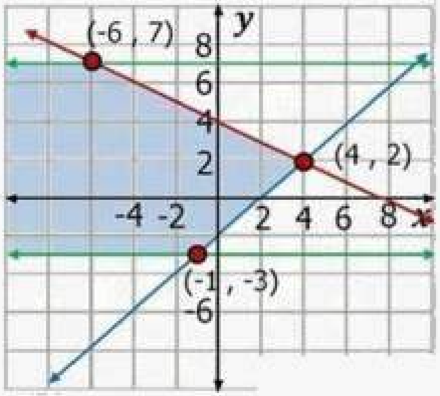
تـــأكـد :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيّاً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

5) $-3 \le y \le 7$ ، $4y \ge 4x - 8$ ، $6y + 3x \le 24$

$f(x,y) = -12x + 9y$



القيمة	$f(x , y)$	$-12x + 9y$	(x , y)
	135	-12(-6) + 9(7)	(-6 , 7)
الصغرى	-30	-12(4) + 9(2)	(4 , 2)
	-15	-12(-1) + 9(-3)	(-1 , -3)

القيمة الصغرى للدالة تساوي 30- وتكون عند النقطة (4,2)، ولا توجد قيمة عظمى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل (6 , 7-) وتعطى القيمة 138 للدالة وهي أكبر من 135.



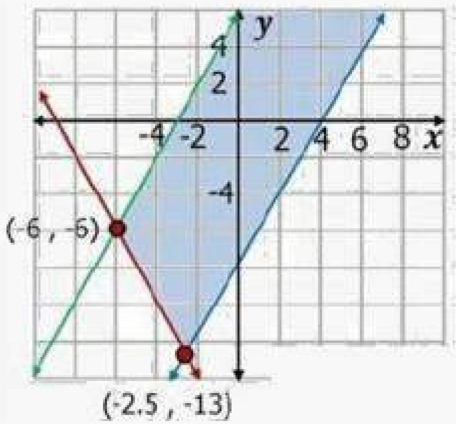
تـــأكـد :-

مثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيّاً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

6) $y \le 2x + 6$ ، $y \ge 2x - 8$ ، $y \ge -2x - 18$

$f(x,y) = 5x - 4y$



$(x\ ,\ y)$	$5x - 4y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(-6,-6)	5(-6) – 4(-6)	-6	
(-2.5,-13)	5(-2.5) – 4(-13)	39.5	العظمى

القيمة العظمى للدالة تساوي 39.5 وتكون عند النقطة (-2.5,-13)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة، لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل مثل (2- , 4-) وتعطى القيمة 12- للدالة وهي أصغر من 6-.

تــــأكــد :-

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لإنتاج الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5ساعات	ساعتان
النوع الثاني	4ساعات	ساعتان

a) أكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

$2x + 2y \leq 90$ ، $5x + 4y \leq 200$ ، $x \geq 0$, $y \geq 0$

b) مثّل نظام المتباينات بيانياً، وحدد منطقة الحل.



c) حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

(0,0) , (40,0) , (20,25) , (0,45)



تــــأكـد :-

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالاً، ومن النوع الثاني 50 ريالاً، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين.

$$f(x,y) = 80x + 50y$$

e) ما عدد الغسالات التي يجب صنعها من كل نوع للحصول على **أكبر ربح** ممكن. وما هو هذا الربح ؟

$(x\ ,\ y)$	$80x + 50y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(0,0)	80(0) + 50(0)	0	
(40,0)	80(40) + 50(0)	3200	العظمى
(20,25)	80(20) + 50(25)	2850	
(0,45)	80(0) + 50(45)	2250	

40 من النوع الأول ، صفر من النوع الثاني

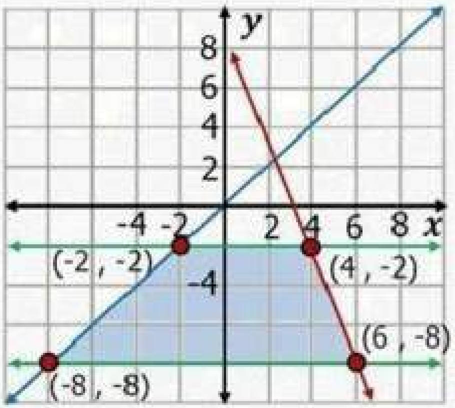
تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

8) $-8 \le y \le -2$ ، $y \le x$ ، $y \le -3x + 10$

$f(x,y) = 5x + 14y$



$(x\ ,\ y)$	$5x + 14y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(-2,-2)	5(-2)+14(-2)	-38	
(4,-2)	5(4)+14(-2)	-8	العظمى
(6,-8)	5(6)+14(-8)	-82	
(-8,-8)	5(-8)+14(-8)	-152	الصغرى



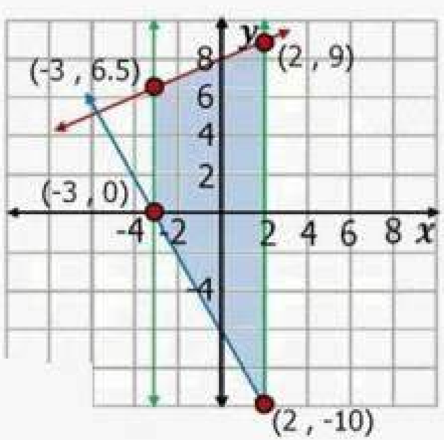
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

9) $2 \geq x \geq -3$ ، $y \geq -2x - 6$ ، $4y \leq 2x + 32$

$f(x,y) = -4x - 9y$



القيمة	$f(x , y)$	$-4x - 9y$	(x , y)
	-46.5	-4(-3) – 9(6.5)	(-3,6.5)
الصغرى	-89	-4(2) – 9(9)	(2,9)
العظمى	82	-4(2) – 9(-10)	(2,-10)
	12	-4(-3) – 9(0)	(-3,0)

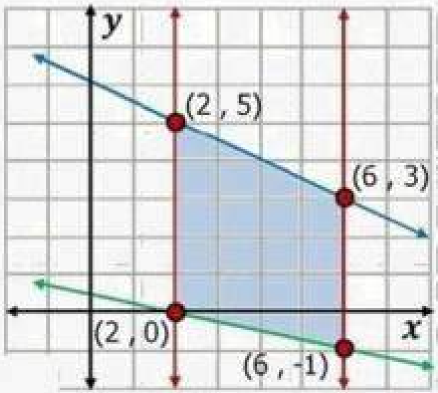
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(10 $x + 4y \geq 2$ ، $2x + 4y \leq 24$ ، $2 \leq x \leq 6$

$f(x,y) = 6x + 7y$



(x , y)	$6x + 7y$	$f(x , y)$	القيمة
(2,5)	6(2) + 7(5)	47	
(6,3)	6(6) + 7(3)	57	العظمى
(6,-1)	6(6) + 7(-1)	29	
(2,0)	6(2) + 7(0)	12	الصغرى

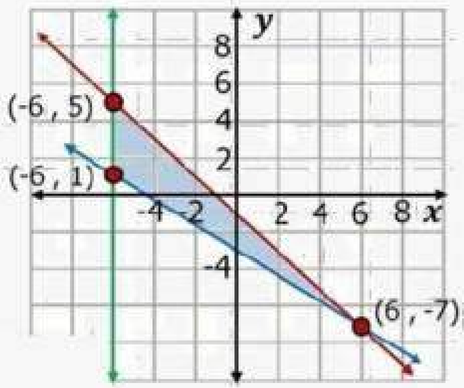
تـدرب وحـل المسائل :ــ

مثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(11 $x \geq -6$ ، $y + x \leq -1$ ، $2x + 3y \geq -9$

$$f(x,y) = -10x - 12y$$



$(x\ ,\ y)$	$-10\,x - 12\,y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(-6,5)	-10(-6) – 12(5)	0	الصغرى
(6,-7)	-10(6) – 12(-7)	24	
(-6,1)	-10(-6) – 12(1)	48	العظمى



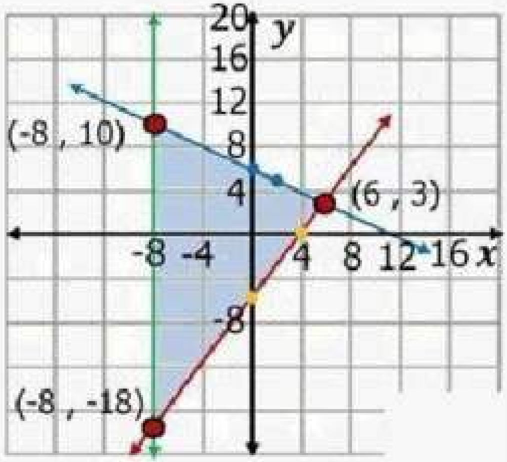
تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(12 $x \geq -8$ ، $3x + 6y \leq 36$ ، $2y + 12 \geq 3x$

$f(x,y) = 10x - 6y$



$(x\ ,\ y)$	$10x - 6\ y$	$f(x\ ,\ y)$	القيمة
(-8,10)	10(-8)-6(10)	-140	الصغرى
(6,3)	10(6)-6(3)	42	العظمى
(-8,-18)	10(-8)-6(-18)	28	

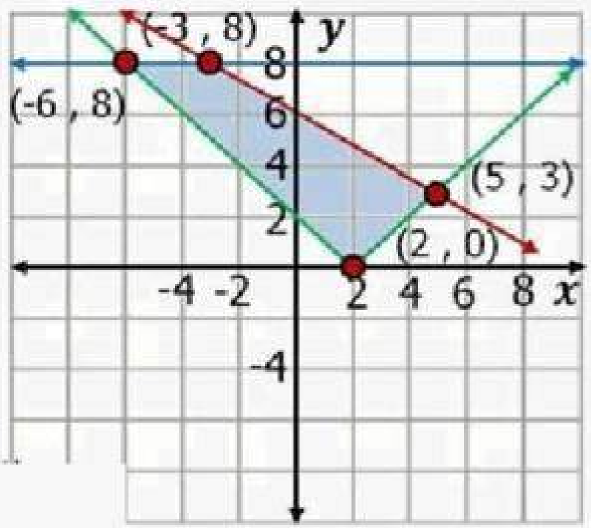
تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

13) $x \ge |x - 2|$ ، $y \le 8$ ، $8y + 5x \le 49$

$f(x,y) = -5x - 15y$



القيمة	$f(x, y)$	$-5x - 15y$	(x, y)
	-90	-5(-6)-15(8)	(-6,8)
الصغرى	-105	-5(-3)-15(8)	(-3,8)
	-70	-5(5)-15(3)	(5,3)
العظمى	-10	-5(2)-15(0)	(2,0)

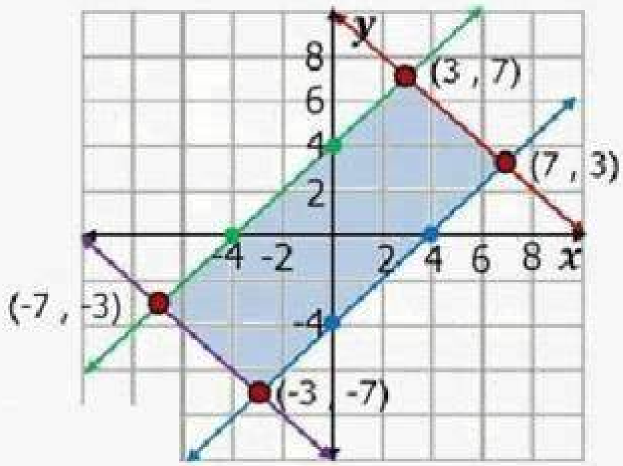
تـدرب وحـل المسائل :-

مـثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

14) $y \leq x + 4$ ، $y \geq x - 4$ ، $y \leq -x + 10$

$y \geq -x - 10$ ، $f(x,y) = -10x + 9y$



(x, y)	$-10x + 9y$	$f(x, y)$	القيمة
(3,7)	-10(3)+9(7)	33	
(7,3)	-10(7)+9(3)	-43	الصغرى
(-3,-7)	-10(-3)+9(-7)	-33	
(-7,-3)	-10(-7)+9(-3)	43	العظمى

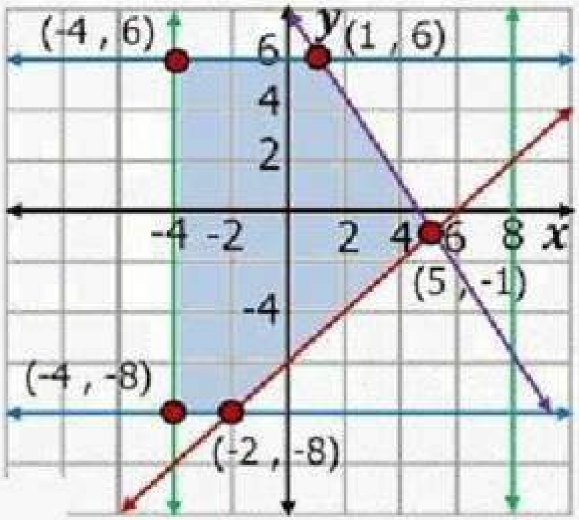
تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

15) $-4 \le x \le 8$ ، $-8 \le y \le 6$ ، $y \ge x - 6$

$4y + 7x \le 31$ ، $f(x,y) = 12x + 8y$



(x , y)	$12x + 8y$	$f(x , y)$	القيمة
(-4,6)	12(-4) + 8(6)	0	
(1,6)	12(1) + 8(6)	60	العظمى
(5,-1)	12(5) + 8(-1)	52	
(-2,-8)	12(-2) + 8(-8)	-88	
(-4,-8)	12(-4) + 8(-8)	-112	الصغرى

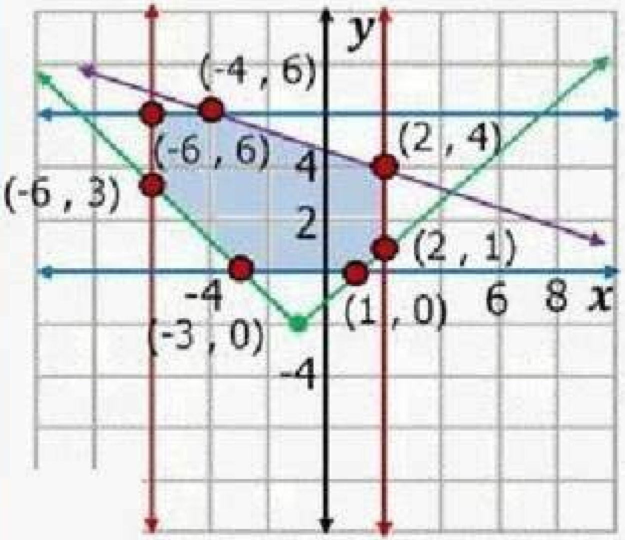
تـدرب وحـل المسائل :-

مـثـال 1,2

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

(16 $y \geq |x+1| - 2$ ، $0 \leq y \leq 6$ ، $-6 \leq x \leq 2$

$x + 3y \leq 14$ ، $f(x,y) = 5x + 4y$



(x , y)	$5x + 4y$	$f(x , y)$	القيمة
(-6,6)	5(-6) + 4(6)	-6	
(-4,6)	5(-4) + 4(6)	4	
(2,4)	5(2) + 4(4)	26	العظمى
(2,1)	5(2) + 4(1)	14	
(1,0)	5(1) + 4(0)	5	
(-3,0)	5(-3) + 4(0)	-15	
(-6,3)	5(-6) + 4(3)	-18	الصغرى

مثال 3

17) **صناعة:** ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالاً، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35ريالاً. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يومياً، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 و حدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة التي يتطلب إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟



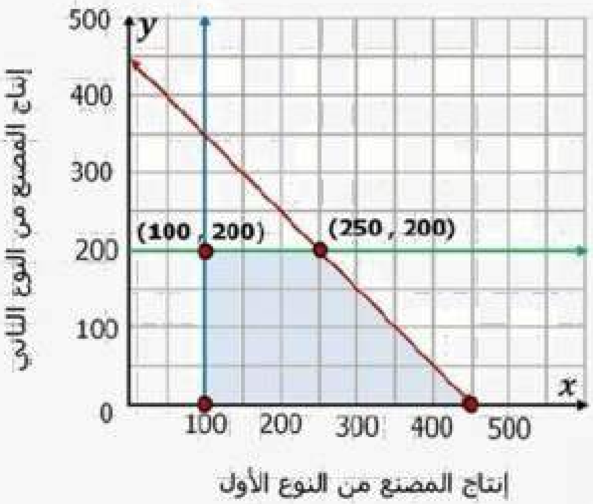


نفرض أن النوع الأول هو x و النوع الثاني هو y.

القيود(الشروط)

$x + y \leq 450$ ، $x \geq 100$ ، $y \leq 200$

الهدف: أن يكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن.



(x,y)	$25x + 35y$	$f(x,y)$	القيمة
(100,200)	25(100) + 35(200)	9500	
(250,200)	25(250) + 35(200)	13250	العظمى
(100,0)	25(100) + 35(0)	2500	
(450,0)	25(450) + 35(0)	11250	

يجب أن ينتج المصنع 250 من النوع الأول ، و 200 من النوع الثاني. ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن.

تدرب وحل المسائل :-

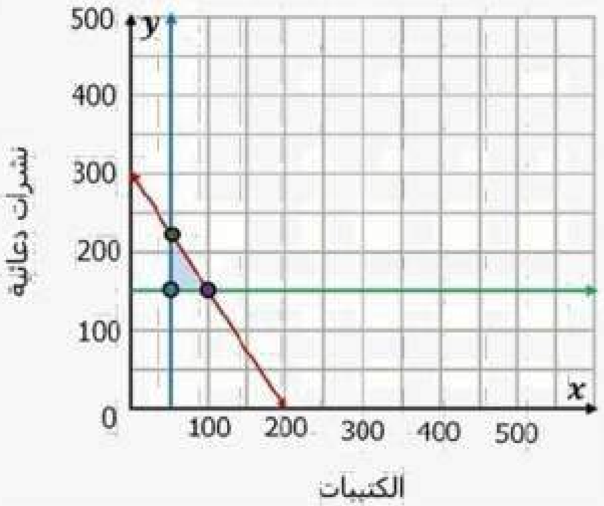
18) **أعمال:** يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات ونشرات دعائية. فإذا كان الكتيب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكتيب 8 ريالات، والنشرة 4 ريالات، وقرر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيباً، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

نفرض أن عدد الكتيبات هو x و عدد النشرات المطبوعة هو y.

القيود(الشروط)

$3x + 2y \leq 600$ ، $x \geq 50$ ، $y \geq 150$

الهدف: أن تكون التكلفة أقل ما يمكن.



القيمة	$f(x,y)$	$8x + 14y$	(x,y)
الصغرى	2500	8(50) + 14(150)	(50 , 150)
	3900	8(50) + 14(250)	(50 , 250)
	2900	8(100) + 14(150)	(100 , 150)

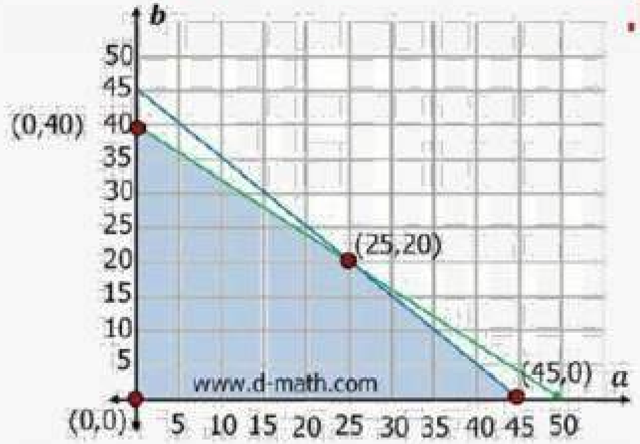
يجب أن يطبع 50 كتيباً و 150 نشرة دعائية.لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

19) طلاء: إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من 45 جداراً وسقفاً متساوية المساحة لكلا النوعين في أحد المباني هو 20 يوماً، و يستطيع معاذ طلاء 2.5جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف.

$a \geq 0 , b \geq 0 , a + b \leq 45 , 4a + 5b \leq 200$

b) مثّل نظام المتباينات بيانيّاً، وحدد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها.



c) إذا كان معاذ يتقاضى 26ريالاً عن طلاء الجدار، و 30ريالاً عن طلاء السقف، فاكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه.

$$f(a,b) = 26a + 30b$$

d) ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ، وما هو هذا المبلغ ؟

(a , b)	$26a + 30b$	$f(a , b)$	القيمة
(0 , 40)	26(0) + 30(40)	1200	
(25 , 20)	26(25) + 30(20)	1250	العظمى
(45 , 0)	26(45) + 30(0)	1170	
(0 , 0)	26(0) + 30(0)	0	

25 جداراً ، 20 سقفاً : 1250ريالاً

20) **شحن:** يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحدة منها $4200kg$، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع بداخلها $480ft^3$، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها $3ft^3$ وتزن $25kg$ ، وكبيرة حجمها $5ft^3$، وتزن $50kg$ ، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير.

a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

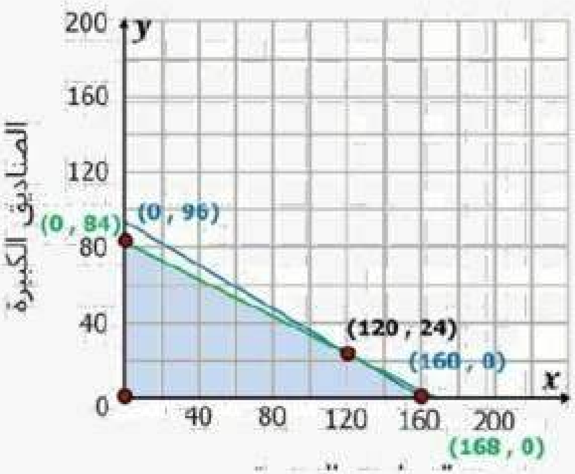
نفرض أن الصندوق الصغيرة هو x و الصندوق الكبيرة هو y.

القيود(الشروط)

(الحجم) $3x + 5y \le 480$

(الوزن) $25x + 50y \le 4200$

الهدف: تحقيق أكبر أجر ممكن.



عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين:
160 صندوق صغير ، 0 صندوق كبير

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟ 800 ريال

تدرب وحل المسائل :-

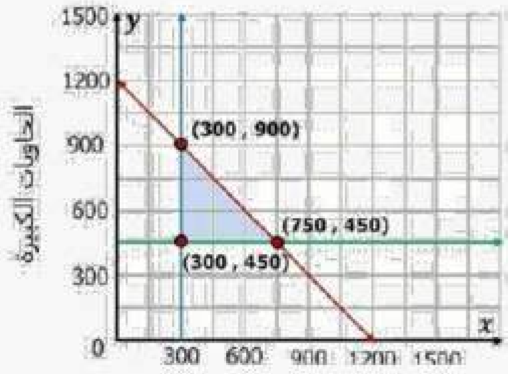
21) **إعادة التدوير:** يقوم أحد المصانع بإعادة تدوير ما لا يزيد على 1200 طن من البلاستيك شهرياً لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لا يقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لا يقل عن 450 طناً في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحاً قدره 175ريالاً لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لمل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟

نفرض أن الحاويات الصغيرة هو x و الحاويات الكبيرة هو y.

القيود(الشروط)

$x + y \leq 1200$ ، $x \geq 300$ ، $y \geq 450$

الهدف: تحقيق أكبر ربح في صنع الحاويات بمقاسين صغير وكبير.



القيمة	$f(x,y)$	$175x + 200y$	(x,y)
العظمى	232500	175(300) + 200(900)	(300,900)
	221250	175(750) + 200(450)	(750,450)
	142500	175(300) + 200(450)	(300,450)

- أكبر ربح يمكن تحقيقه 232500 ريالاً.

عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة فإن البيانات لا تتأثر .

- عدد الأطنان المستعملة لمل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح هو، 300 طن لصنع الحاويات الصغيرة و 900 طن لصنع الحاويات الكبيرة.

الفهرس